Digraph eksentris dari turnamen transitif dan regular

(Eccentric digraph of transitive and regular tournaments)

Oleh : Hazrul Iswadi

Departemen Matematika dan IPA (MIPA)

Universitas Surabaya (UBAYA),

Jalan Raya Kalirungkut, Kampus Tenggilis,

Gedung TG lantai 6, Surabaya,

e-mail : us6179@ubaya.ac.id

Abstract

Eccentricity $e(u)$ of vertex u is the maximum distance from u to any other vertices in digraph G. A vertex v is *an eccentric vertex of* u if the distance from u is equal to $e(u)$. *Eccentric digraph* $ED(G)$ of digraph G is the digraph that have the same vertices with G and there is an arc from u to v if and only if v is an eccentric vertex of u. Tournament $T = (V,E)$ with order n is a digraph without loop such that every pair vertices i and j joined with one and only one an arc (i,j) or (j,i). Tournament T is called transitive if there are arc (u,v) and (v,w) in T then (u,w) also and arc in T and is called regular if it have n odd order with each vertex joined to and from $\frac{n-1}{2}$ another vertices in T. In this paper, we consider the iteration properties of eccentric digraph of transitive and regular tournament

Keywords: eccentricity, eccentric digraph, transitive tournament, regular tournament, periodic.

1. Pendahuluan

Definisi-definisi berikut yang berkaitan dengan digraph di ambilkan dari Chartrand dan Lesniak (Chartrand dan Lesniak, 1996). Suatu *digraph* (directed graph) $G = G(V,E)$ adalah sebuah himpunan tak kosong berhingga $V = V(G)$ yang disebut dengan *titik-titik* dan himpunan pasangan terurut $E = E(G)$ dari titik-titik berbeda di V yang disebut dengan *busur-busur*. Kardinalitas himpunan titik $|V(G)|$ digraph G disebut dengan *orde* (order) G dan kardinalitas himpunan busur $|E(G)|$ digraph G disebut dengan *ukuran* (size) G. Digraph G dengan satu titik disebut dengan digraph trivial. *Jalan berarah* W (directed walk) dengan panjang k di digraph G adalah barisan berhingga $W = v_0a_1v_1\dots a_kv_k$ yang memiliki bentuk selang-seling titik dengan busur sehingga untuk i = 1, 2,…, k busur a_i mempunyai pangkal v_{i-1} dan akhir v_i. *Lintasan berarah P* (directed path) dengan panjang k di digraph G adalah jalan berarah dengan titik-titik v_0, v_1, … , v_k semuanya berbeda. Jika lintasan berarah $P = v_0a_1v_1…a_kv_k$ diketahui dengan jelas seringkali ditulis dengan singkat sebagai lintasan berarah v_0-v_k. *Lingkaran berarah* (directed cycle) C_k dengan panjang k adalah sebuah lintasan berarah dengan titik awal v_0 sama dengan titik ujung v_k. Untuk selanjutnya jalan berarah, lintasan berarah, dan lingkaran berarah disingkat dengan menyebut sebagai jalan, lintasan, dan lingkaran.

Jarak (distance) $d(u,v)$ antara titik u dan v adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u ke v. Didefinisikan $d(u,v) = \infty$ jika tidak ada lintasan yang menghubungkan u ke v. *Eksentrisitas* (eccentricity) $e(u)$ dari titik u adalah maksimum jarak dari u ke suatu titik lain di digraph G. Titik v adalah *titik eksentris* (vertex eccentric) dari u jika $d(u,v) = e(u)$. Buckley (Buckley, 2002) mendefinisikan *digraph eksentris* (digraph eccentric) $ED(G)$ dari graph G sebagai suatu digraph yang mempunyai titik yang sama dengan G dan terdapat sebuah busur dari u ke v jika v adalah titik eksentris dari u. Buckley sampai pada kesimpulan " Untuk hampir semua graf G, digraph eksentrisnya adalah $ED(G) = (\overline{G})^*$", dengan $(\overline{G})^*$ menyatakan komplemen G dimana tiap sisi tak berarah diganti dengan dua busur simetri. Boland dan Miller (Boland dan Miller, 2001), terinspisari dengan pekerjaan Buckley, memperkenalkan digraph eksentris dari sebuah digraph. Miller dkk (Miller dkk, 2002), memperkenalkan iterasi dari digraph eksentrisitas G. Diberikan bilangan bulat $k \geq 2$, digraph eksentrisitas iterasi ke-k G ditulis sebagai $ED^k(G) = ED(ED^{k-1}(G))$. Sedangkan $ED^1(G) = ED(G)$ dan $ED^0(G) = G$. Untuk setiap digraph G terdapat bilangan bulat terkecil $p > 0$ dan $t \geq 0$ sehingga $ED^t(G) = ED^{t+p}(G))$. Bilangan p disebut *periode* (period) G, dinotasikan dengan $p(G)$, dan bilangan t disebut dengan *ekor* (tail) G, dinotasikan dengan $t(G)$. Digraph G disebut *periodic* jika $t(G) = 0$. Karena persoalan digraph eksentris dari digraph sangat baru maka banyak masalah terbuka yang bisa dijawab. Beberapa masalah terbuka (Miller dan Boland, 2001) dikemukan antara lain:

1. Temukan digraph eksentris dari bermacam-macam kelas graph dan digraph.
2. Diberikan suatu digraph G, adakah digraph H sehingga $ED(H) = G$?.

Terpicu untuk menjawab masalah terbuka di atas, pada tulisan ini akan dikaji digraph eksentris dari suatu kelas digraph yang dikenal dengan turnamen. Dalam tulisan ini hanya dibahas digraph eksentris turnamen transitif dan regular beserta dengan sifat iterasinya.

Definisi dan istilah yang berkaitan dengan turnamen berikut ini diambilkan dari Chartrand dan Lesniak (Chartrand dan Lesniak, 2001). Sebuah *turnamen* $T = (V,E)$ berorde n adalah sebuah digraph tanpa loop sedemikian sehingga tiap pasang titik-titik i dan j dihubungkan dengan tepat satu busur (i,j) atau (j,i). Jika $(i,j) \in E$ maka disebut i *mendominasi* j dan j *didominasi oleh* i. *Derajat keluar* (out-degree) $\deg^{+}(i)$ dari suatu titik i pada turnamen T adalah jumlah titik-titik yang didominasi oleh i. *Derajat masuk* (in-degree) $\deg^{-}(i)$ dari suatu titik i pada turnamen T adalah jumlah titik-titik yang mendominasi i.

Dalam turnamen setengah kompetisi (round-robin tournament), derajat keluar $\deg^{+}(i)$ dari suatu titik i adalah jumlah kemenangan yang dicapai pemain i, dengan alasan kedekatan istilah, maka derajat keluar $\deg^{+}(i)$ suatu titik i sering disebut dengan *skor* s_i. Berikut ini beberapa definisi yang berkaitan dengan skor turnamen (Jimenez, 1998). Sebuah titik i di turnamen T yang berorde n disebut *pemancar* (transmitter) i jika mempunyai skor s_i = n-1 dan disebut *penerima* (receiver) jika mempunyai skor s_i = 0. *Kekalahan* (reversal) $\tilde{T}$ dari suatu turnamen T adalah turnamen yang diperoleh dari T dengan membalik semua arah busurnya. Sehingga kekalahan dari kekalahan $\tilde{T}$ adalah T sendiri. Sebuah turnamen tak trivial dengan orde n disebut *regular* jika n ganjil dan setiap titik mempunyai skor $s_i = \frac{n-1}{2}$. *Barisan skor* turnamen adalah barisan skor $s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n$ dari titik-titiknya.

Salah satu sifat skor dari turnamen (Chartrand dan Lesniak, 1996) adalah

Teorema 1

Misalkan v sebuah titik pada turnamen T dengan skor maksimum. Jika u titik lain di T maka $d(v,u) \le 2$

Turnamen T disebut *transitif* (transitive) jika (u,v) dan (v,w) busur-busur di T maka (u,w) juga busur di T. Salah satu sifat dasar turnamen transitif (Cartrand dan Lesniak, 1996) disebutkan

Teorema 2

Sebuah turnamen transitif jika dan hanya jika turnamen tersebut asiklik (acyclic)

Kemudian dengan menggunakan teorema 3 dan akibat 4 (Chartrand dan Lesniak, 1996) dapat disimpulkan bahwa turnamen transitif orde n hanya ada tepat satu dengan barisan skor 0, 1, 2, … , n-1.

Teorema 3

Barisan tak turun S dari n ($n \ge 1$) bilangan tak negatif adalah barisan skor turnamen transitif orde n jika dan hanya jika S adalah barisan 0, 1, 2, … , n-1

Akibat 4

Untuk setiap bilangan bulat positif *n*, terdapat tepat satu turnamen transitif orde *n*

2. Hasil-hasil

Lema 5 berikut ini akan membantu untuk menentukan digraph eksentris dari turnamen transitif.

Lema 5

Jika *v* suatu titik pemancar di digraph *G* maka *v* selalu menjadi titik pemancar pada $ED^k(G)$, untuk setiap $k \geq 0$

Bukti

Misalkan *v* titik pemancar di digraph *G* berorde *n*. Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa *v* titik pemancar pada $ED^k(G)$, untuk setiap $k \geq 0$. Jelas bahwa v_i titik pemancar pada $ED^0(G) = G$. Asumsikan bahwa *v* titik pemancar pada $ED^k(G)$, akan ditunjukkan bahwa *v* titik pemancar pada $ED^{k+1}(G)$. Karena *v* titik pemancar pada $ED^k(G)$ maka skor $s_v = n$-1 pada $ED^k(G)$. Berarti $d(v,u) = 1$ untuk setiap titik *u* di $ED^k(G)$ dan $e(v) = 1$. Jadi *v* memiliki titik eksentris semua titik lain di $ED^k(G)$. Sehingga *v* terhubung dengan semua titik lain pada $ED^{k+1}(G) = ED(ED^k(G))$. □

Teorema 6

Misalkan *v* suatu titik penerima di turnamen *T* orde *n* maka *v* selalu menjadi titik pemancar di $ED^k(T)$, untuk setiap $k \geq 1$

Bukti:

Misalkan *v* titik penerima di turnamen *T* orde *n*. Berarti *v* didominasi oleh semua titik lain di *T*. Karena *T* turnamen maka $d(v,u) = \infty$, untuk semua titik lain *u* di *T*. Jadi $e(v) = \infty$ dan titik eksentris dari *v* adalah semua titik lain di *T*. Jadi *v* titik pemancar di

$ED(T)$. Kemudian dengan mengunakan lema 5 diperoleh bahwa v selalu menjadi titik pemancar di $ED^k(T)$, untuk setiap $k \geq 1$. □

Berdasarkan lema 5 dan teorema 6 berarti titik pemancar dan penerima di turnamen transitif T akan selalu menjadi titik pemancar di $ED^k(T)$, untuk setiap $k \geq 1$.

Teorema 7

Misalkan v titik bukan pemancar di turnamen transitif T orde n. Jika (u,v) di T maka (v,u) berada di $ED(T)$ atau sebaliknya

Bukti:

Misalkan v titik bukan pemancar di turnamen transitif T berorde n. Akan dibuktikan terlebih dahulu jika (u,v) di T maka (v,u) berada di $ED(T)$. Jika v bukan titik pemancar maka skor $s_v < n$-1. Dengan demikian terdapat sejumlah $k = (n\text{-}1) - s_v$ titik-titik di T yang mendominasi v. Misalkan u merupakan salah satu titik yang mendominasi v. Jelas bahwa u bukan titik penerima di T. Andaikan bahwa v mungkin mencapai u dalam lintasan v-u. Tapi lintasan v-u digabung dengan busur (u,v) membentuk lingkaran. Hal ini bertentangan dengan teorema 2 bahwa turnamen transitif T adalah asiklik. Jadi v tidak terhubung dengan u. Sehingga $d(v,u) = \infty$. Sedangkan untuk setiap titik w yang didominasi oleh v, $d(v,w) = 1$. Sehingga $e(v_i) = \infty$ dan titik eksentris dari v adalah titik u dengan (u,v) di T. Jadi (v,u) berada di $ED(T)$. Kemudian jika (v,u) di T maka u bukan titik pemancar di T. Dengan mengunakan cara pembuktian yang sama dengan acuan u titik bukan pemancar dan (v,u) di T maka diperoleh (u,v) berada di $ED(T)$. □

Kemudian dengan mengunakan lema 5, dan teorema 7 bisa ditentukan digraph eksentris dari turnamen transitif T orde n.

Teorema 8

Digraph eksentris $ED(T)$ dari turnamen transitif T orde n dengan v titik pemancar adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari turnamen transitif T ditambah dengan busur-busur dari v ke titik-titik yang lain

Bukti:

Misalkan v titik di turnamen transitif T berorde n. Dengan lema 5, jika v titik pemancar di T maka v juga titik pemancar di $ED(T)$. Berarti v terhubung ke semua titik lain di $ED(T)$. Misalkan u titik lain di T. Jika v titik bukan pemancar di T dan (u,v) berada di T, berdasarkan teorema 7, maka (v_i,u) berada di $ED(T)$ atau jika (v,u) berada di T maka (u,v) berada di $ED(T)$. Jadi busur-busur di $ED(T)$ diperoleh dari membalik arah busur-busur di T ditambah dengan busur-busur dari v ke titik-titik yang lain. □

Dari teorema 8 didapatkan bahwa busur dari titik pemancar ke titik yang lainnya di $ED(T)$ adalah busur dua arah. Dengan mengunakan busur dua arah tersebut diperoleh teorema 9 berikut.

Teorema 9

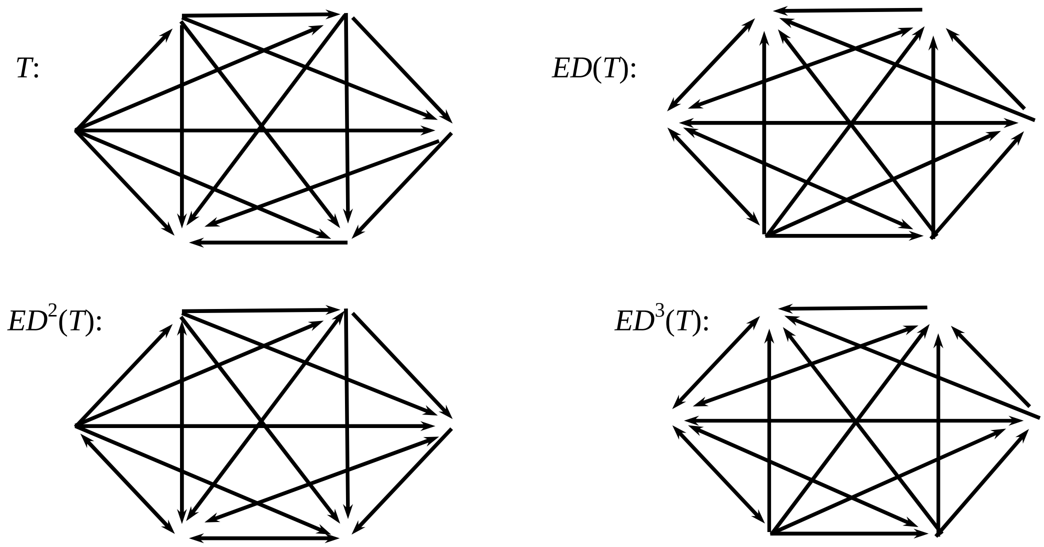
Turnamen transitif T orde n memiliki $p(T) = 2$ dan $t(T) = 1$

Bukti:

Misalkan turnamen transitif T berorde n dengan titik-titiknya $\{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$ dan $v_i \in \{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$. Akan ditunjukkan $ED(T) = ED^3(T)$ dengan cara setiap titik di T mempertahankan titik-titik yang didominasinya dan mendominasinya di $ED(T)$ dan $ED^3(T)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan skor titik v_i di T adalah $s_i = i - 1$, dengan $i = 1, 2,\ldots, n$, berarti v_i mendominasi v_1 , v_2 , … , v_{i-1} dan didominasi oleh v_{i+1} ,

v_{i+2} , … , v_n. Khusus v_1 titik penerima mempunyai skor 0, sehingga tidak mendominasi satupun titik yang lain tapi didominasi oleh semua titik yang lain. Sedangkan v_n titik pemancar di T dengan skor $s_n = n - 1$ sehingga mendominasi semua titik yang lain tapi tidak didominasi oleh titik yang lain. Berdasarkan lema 5 dan teorema 6, v_0 dan v_1 selalu menjadi titik pemancar di $ED^k(T)$, untuk setiap $k \geq 1$. Kemudian dari teorema 8 diperoleh $ED(T)$ adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari T ditambah dengan busur-busur dari titik pemancar v_n. Misalkan v_i bukan titik pemancar dan (v_i,v_j) di T dengan v_j titik lain di T. Jelas v_j bukan titik pemancar di T, dari teorema 8, (v_i,v_n), (v_j,v_n), (v_n,v_i), (v_n,v_j), dan (v_j,v_i) berada di $ED(T)$. Jadi v_i tidak dapat mencapai v_j dalam satu langkah di $ED(T)$ tapi v_i dapat mencapai v_j dalam dua langkah yaitu melalui v_n. Jadi $d(v_i,v_j) = 2$ di $ED(T)$. Sedangkan jika (v_k,v_i) di T dengan v_k titik lain di T maka, berdasarkan teorema 8, (v_i,v_k) di $ED(T)$. Sehingga titik eksentris dari v_i di $ED(T)$ adalah titik v_j sehingga (v_i,v_j) di T. Jadi $ED^2(T)$ hampir sama dengan T, kecuali bahwa titik penerima v_1 di $ED^2(T)$ menjadi titik pemancar. Jadi busur dari titik penerima v_1 ke titik yang lainnya di $ED^2(T)$ adalah busur dua arah. Dengan menggunakan bantuan busur dua arah di $ED^2(T)$ akan ditentukan $ED^2(T)$. Jika (v_i,v_k) di T dengan v_k titik lain di T maka (v_i,v_k) di $ED^2(T)$. Sedangkan jika (v_j,v_i) di T maka (v_j,v_i) di $ED^2(T)$. Jadi v_i tidak dapat mencapai v_j dalam satu langkah di $ED^2(T)$ tapi dapat dalam dua langkah melalui v_1. Jadi $d(v_i,v_j) = 2$ di $ED^2(T)$. Sehingga titik eksentris v_i di $ED^2(T)$ adalah titik v_j dimana (v_j,v_i) di T. Jadi $ED^3(T)$ adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari T ditambah dengan busur-busur dari titik pemancar v_n dan sama dengan $ED(T)$. □

Ilustrasi untuk iterasi digraph eksentris turnamen transitif T orde 6 dapat dilihat pada gambar 1



Gambar 1 Iterasi digraph transitif T orde 6

Berikutnya akan ditentukan digraph eksentris dari turnamen regular T orde n, dengan n ganjil dan $n \geq 3$.

Teorema 10

Digraph eksentris dari turnamen regular T orde n adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari T

Bukti:

Misalkan T turnamen regular T orde n, dengan n ganjil dan $n \geq 3$. Akan ditunjukkan jika (v,u) di T maka (u,v) di $ED(T)$ dan sebaliknya. Misalkan u dan v titik-titik di turnamen regular T orde n. Karena setiap titik di turnamen regular orde n mempunyai skor sama yaitu $\frac{n-1}{2}$ maka setiap titik di turnamen regular T orde n adalah titik dengan skor maksimum. Berdasarkan teorema 2, $d(u,v) \leq 2$. Misalkan (v,u) di T. Berarti (u,v) tidak berada di T maka $d(u,v) = 2$. Berarti $e(u) = 2$ di T dan titik eksentris dari u adalah titik yang tidak didominasinya di T. Sehingga (u,v) di $ED(T)$. Misalkan (u,v) di T . Karena $e(u) = 2$ maka (u,v) tidak berada di $ED(T)$. Kemudian karena (v,u) tidak berada di T dan berdasarkan pembuktian sebelumnya maka (v,u) di $ED(T)$. □

Setiap kekalahan $\tilde{T}$ dari T juga berbentuk turnamen dengan skor titik-titiknya $\frac{n-1}{2}$. Jadi digraph eksentris dari turnamen regular T orde n, dengan n ganjil dan $n \geq 3$ berbentuk turnamen regular orde n.

Akibat 11

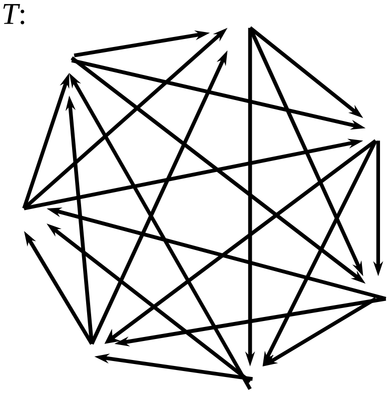
Turnamen regular T orde n periodic dengan $p(T) = 2$

Bukti:

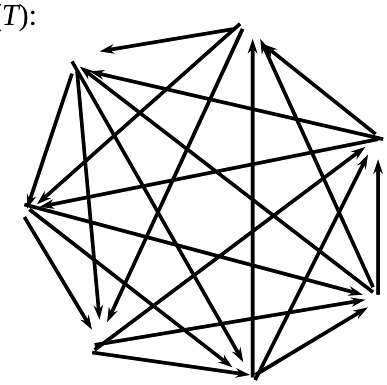
Misalkan T turnamen regular T orde n, dengan n ganjil dan $n \geq 3$. Akan ditunjukkan $ED^2(T) = T$. Dari teorema 11, $ED(T) = \tilde{T}$. Kemudian karena $ED(T)$ juga turnamen regular orde n maka digunakan teorema 11 sekali lagi diperoleh $ED^2(T) = ED(\tilde{T})$ yaitu kekalahan dari kekalahan $\tilde{T}$. Berarti $ED^2(T)$ adalah T. □

Ilustrasi untuk iterasi digraph eksentris turnamen regular orde 7 dapat dilihat pada gambar 2

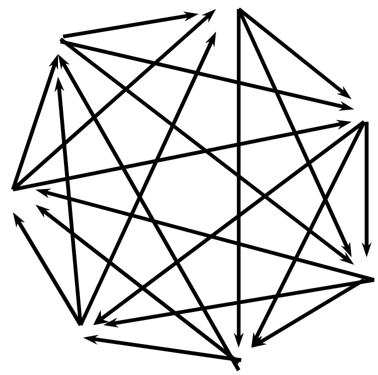
T:



$ED(T)$:



$ED^2(T)$:



Gambar 2 Iterasi digraph eksentris turnamen regular *T* orde 7

3. Daftar pustaka

Boland, J., and Miller, M., 2001, **The eccentric digraph of a digraph**, *Proceeding of AWOCA '01*, 66-70.

Bollobas, B., 1998, **Modern graph theory**, Springer-Verlag, Berlin.

Buckley, F., 2002, **The eccentric digraph of a graph**, *Congressus Numerantium*, akan terbit.

Chartrand, G. and Lesniak, L., 1996, **Graphs and Digraphs**, 3rd edition, Chapman & Hill, London

Jimenez, G., 1998, **Domination graphs of near-regular tournaments and the domination-compliance graph**, Dissertation, University of Colorado at Denver, Denver

Miller, M., Gimbert, J., Ruskey, F., and Ryan, J., 2002, **Iterations of eccentric digraphs**, preprint.