Digraf eksentris dari turnamen kuat

Hazrul Iswadi
Departemen Matematika dan IPA (MIPA)
Universitas Surabaya (UBAYA),
Jalan Raya Kalirungkut,
Tenggilis, Surabaya,
e-mail : us6179@wolf.ubaya.ac.id

Abstrak

Eksentrisitas $e(u)$ suatu titik u di digraf G adalah jarak maksimum dari u ke titik lain di G. *Titik eksentris* u adalah titik lain v di G yang memiliki jarak dari u sama dengan $e(u)$. *Digraf eksentris* $ED(G)$ dari digraf G adalah digraf yang memiliki titik yang sama dengan G dan terdapat busur u ke v jika dan hanya jika v titik eksentris u. *Turnamen* $T = (V,E)$ dengan jumlah titik sebanyak n adalah digraf tanpa loop sehingga setiap pasang titik u dan v dihubungkan dengan satu dan hanya satu (u,v) or (v,u). Turnamen T disebut *kuat* jika untuk setiap pasangan titik u dan v selalu terdapat lintasan dari u ke v dan dari v ke u. Tulisan ini meneliti sifat digraf eksntris turnamen kuat dan sfat iterasinya.

Kata-kunci: eksentrisitas, digraf eksentris, turnamen kuat

1. Pendahuluan

Suatu *digraf* (directed graph) $G = G(V,E)$ adalah sebuah himpunan tak kosong berhingga $V = V(G)$ yang disebut dengan *titik-titik* dan himpunan pasangan terurut $E = E(G)$ dari titik-titik u dan v yang berbeda di V yang disebut dengan *busur-busur* dan ditulis dengan $a = (u,v)$. Kardinalitas himpunan titik $|V(G)|$ digraf G disebut dengan *orde* (order) G dan kardinalitas himpunan busur $|E(G)|$ digraf G disebut dengan *ukuran* (size) G. Digraf G dengan satu titik disebut dengan digraf trivial. *Jalan berarah W* (directed walk) dengan panjang k di digraf G adalah barisan berhingga $W = v_0a_1v_1\ldots a_kv_k$ yang memiliki bentuk selang-seling titik dengan busur sehingga untuk $i = 1, 2,\ldots, k$ busur a_i mempunyai pangkal v_{i-1} dan akhir v_i. *Lintasan berarah P* (directed path) dengan panjang k di digraf G adalah jalan berarah dengan titik-titik $v_0, v_1, \ldots , v_k$ semuanya berbeda. Jika lintasan berarah $P = v_0a_1v_1\ldots a_kv_k$ diketahui dengan jelas seringkali ditulis dengan singkat sebagai lintasan berarah v_0-v_k. *Lingkaran berarah* (directed cycle) C_k dengan panjang k adalah sebuah lintasan berarah dengan titik awal v_0 sama dengan titik ujung v_k. Untuk selanjutnya jalan berarah, lintasan berarah, dan lingkaran berarah disingkat dengan menyebut sebagai jalan, lintasan, dan lingkaran. *Jarak* (distance) $d(u,v)$ antara titik u dan v adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u ke v. Didefinisikan $d(u,v) = \infty$ jika tidak ada lintasan yang menghubungkan u ke v. *Eksentrisitas* (eccentricity) $e(u)$ dari titik u adalah maksimum jarak dari u ke suatu titik lain di digraf G atau $e(u) = \max_{v\in G} d(u,v)$. *Radius* $rad(G)$ dari digraf G adalah minimum eksentrisitas $e(u)$ atau $rad(G) = \min_{v\in G} e(v)$ dan *pusat* $Cen(G)$ dari G dedifinisikan himpunan titik dengan sifat $e(u) = rad(G)$. Titik v adalah *titik eksentris* (vertex eccentric) dari u jika $d(u,v) = e(u)$.

Definisi-definisi dasar tentang digraf pada paragraf di atas diambilkan dari Chartrand dan Lesniak (1996) dan Bollobas (1998).

Buckley (Buckley, 2002) mendefinisikan *digraf eksentris* (digraph eccentric) $ED(G)$ dari graf G sebagai suatu digraf yang mempunyai titik yang sama dengan G dan terdapat sebuah busur dari u ke v jika v adalah titik eksentris dari u. Buckley sampai pada kesimpulan “ Untuk hampir semua graf G, digraf eksentrisnya adalah $ED(G) = (\overline{G})^*$”, dengan $(\overline{G})^*$ menyatakan komplemen G dimana tiap sisi tak berarah diganti dengan dua busur simetri. Boland dan Miller (2001) memperkenalkan digraf eksentris dari sebuah digraf dengan beberapa pertanyaan terbuka tentang sifat dan eksistensi digraf eksentris bermacam-macam kelas dari digraf. Miller dkk (Miller dkk, 2002), memperkenalkan iterasi dari digraf eksentrisitas G. Diberikan bilangan bulat $k \geq 2$, digraf eksentrisitas iterasi ke-k G ditulis sebagai $ED^k(G) = ED(ED^{k-1}(G))$. Sedangkan $ED^1(G) = ED(G)$ dan $ED^0(G) = G$. Untuk setiap digraf G terdapat bilangan bulat terkecil $p > 0$ dan $t \geq 0$ sehingga $ED^t(G) = ED^{t+p}(G))$. Bilangan p disebut *periode* (period) G, dinotasikan dengan $p(G)$, dan bilangan t disebut dengan *ekor* (tail) G, dinotasikan dengan $t(G)$. Digraf G disebut *periodic* jika $t(G) = 0$.

Definisi dan istilah yang berkaitan dengan turnamen berikut ini diambilkan dari Chartrand dan Lesniak (1996) dan Jimenez (1998). Sebuah *turnamen* $T = (V,E)$ berorde n adalah sebuah digraf tanpa loop sedemikian sehingga tiap pasang titik-titik v_i dan v_j dihubungkan dengan tepat satu busur (v_i,v_j) atau (v_j,v_i). Jika $(v_i,v_j) \in E$ maka disebut v_i *mendominasi* v_j dan v_j *didominasi oleh* v_i. *Derajat keluar* (out-degree) $\deg^+(v_i)$ dari suatu titik v_i pada turnamen T adalah jumlah titik-titik yang didominasi oleh v_i. *Derajat masuk* (in-degree) $\deg^-(v_i)$ dari suatu titik v_i pada turnamen T adalah jumlah titik-titik yang mendominasi v_i. Dalam turnamen setengah kompetisi (round-robin tournament), derajat keluar $\deg^+(v_i)$ dari suatu titik v_i adalah jumlah kemenangan yang dicapai pemain v_i. Karena alasan kedekatan istilah maka derajat keluar $\deg^+(v_i)$ suatu titik v_i sering disebut dengan *skor* s_{v_i}. Sebuah titik v_i di turnamen T yang berorde n disebut *pemancar* (transmitter) v_i jika mempunyai skor $s_{v_i} = n$-1 dan disebut *penerima* (receiver) jika mempunyai skor $s_{v_i} = 0$. *Kekalahan* (reversal) $\tilde{T}$ dari suatu turnamen T adalah turnamen yang diperoleh dari T dengan membalik semua arah busurnya. Sehingga kekalahan dari kekalahan $\tilde{T}$ adalah T sendiri. Sebuah turnamen tak trivial dengan orde n disebut *regular* jika n ganjil dan setiap titik mempunyai skor $s_{v_i} = \frac{n-1}{2}$. Sedangkan turnamen T disebut *transitif* jika (v_i,v_j) dan (v_j,v_k) busur-busur di T maka (v_i,v_k) juga busur di T. Turnamen T disebut *kuat* jika untuk setiap pasangan titik v_i dan v_j selalu terdapat lintasan v_i-v_j dan v_j-v_i. Turnamen kuat T disebut trivial jika T memiliki orde 1 dan 2. *Barisan skor* turnamen adalah barisan skor $s_{v_1} \leq s_{v_2} \leq \dots \leq s_{v_n}$ dari titik-titiknya yang biasa ditulis dengan S: $s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_n}$.

Dari Chartrand dan Lesniak (1996) telah diketahui untuk turnamen T orde n, untuk setiap n, hanya ada tepat satu dengan barisan skor 0, 1, 2, ... , n-1. Sifat digraf eksentris dan iterasi digraf eksentris untuk turnamen regular dan transitif sudah diteliti oleh Iswadi (2003). Digraf eksentris $ED(T)$ dari turnamen transitif T orde n dengan v titik pemancar adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari turnamen transitif T ditambah dengan busur-busur dari v ke titik-titik yang lain. Turnamen transitif T orde n memiliki $p(T) = 2$ dan $t(T) = 1$. Sedangkan digraf eksentris dari turnamen regular T orde n adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari T. Turnamen regular T orde n periodik dan $p(T) = 2$.

Berikut ini sifat dari barisan skor turnamen kuat oleh Harary dan Moser (1966).

Teorema 1

Barisan tak turun bilangan tak negatif S: $s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_n}$ adalah skor turnamen kuat jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^{k} s_{v_i} > \binom{k}{2}$$

untuk $1 \leq k \leq n-1$ dan

$$\sum_{i=1}^{n} s_{v_i} = \binom{n}{2}.$$

Lebih jauh, jika S adalah barisan skor dari turnamen kuat maka setiap turnamen dengan S sebagai barisan skor adalah kuat.

Kemudian beberapa sifat turnamen kuat pada teorema dan akibat di bawah ini (Chartrand dan Lesniak, 1996) juga diperlukan untuk pembuktian teorema 5, 6, dan akibat 7 yang ada pada bagian hasil-hasil.

Teorema 2

Misalkan v sebuah titik pada turnamen T dengan skor maksimum. Jika u titik lain di T maka $d(v,u) \leq 2$

Akibat 3

Setiap turnamen kuat tak trivial mampunyai radius 2

Teorema 4

Pusat dari setiap turnamen kuat tak trivial memuat sekurang-kurangnya tiga titik

2. Hasil-hasil

Teorema 5

Misalkan T suatu turnamen kuat tak trivial orde n. Setiap dua titik termuat dalam suatu lingkaran C_3 jika dan hanya jika semua titik v di T eksentrisitasnya sama dengan $rad(T)$

Bukti:

Jika setiap titik v di T eksentrisitasnya sama dengan radius T, sedangkan dari akibat 3 diketahui $rad(T) = 2$, berarti setiap titik di T mempunyai $e(v) = 2$. Misalkan u dan v dua titik di T. Akan diperlihatkan bahwa keduanya termuat dalam suatu lingkaran panjang 3. Jika $(u,v) \in T$ maka $(v,u) \notin T$. Karena $e(v) = 2$ maka v akan mencapai u dalam dua langkah. Sehingga u dan v termuat dalam suatu lingkaran panjang 3. Jika $(u,v) \notin T$ maka $(v,u) \in T$. Dengan alasan yang sama dengan di atas, u akan mencapai v dalam 2 langkah. Sehingga diperoleh lagi u dan v dalam suatu lingkaran panjang 3. Jika setiap dua titik terdapat dalam suatu lingkaran panjang 3 maka jarak setiap titik u di T ke titik yang lainnya selalu 1 atau 2. Andaikan terdapat titik u sehingga $d(u,v) = 1$, untuk setiap titik lain di T maka tidak terdapat lintasan dari titik lain v ke u. Hal ini bertentangan dengan T turnamen kuat. Jadi haruslah setiap titik u di T memiliki $d(u,v) = 2$, untuk suatu v di T. Jadi setiap titik u memiliki eksentrisitas $e(u) = 2 = rad(T)$. □

Teorema 6

Misalkan T suatu turnamen kuat tak trivial orde n. Jika semua titik v di T eksentrisitasnya sama dengan $rad(T)$ maka $ED(T) = \tilde{T}$, dengan $\tilde{T}$ juga suatu turnamen kuat

Bukti:

Akan diperlihatkan terlebih dahulu $ED(T) = \tilde{T}$. Misalkan u dan v dua titik di T. Jika $(u,v) \in T$, sedangkan setiap titik u di T memiliki $e(u) = rad(T) = 2$ Berarti v bukan titik eksentrisitas u. Jadi $(u,v) \notin ED(T)$. Jika $(u,v) \notin T$ maka haruslah $d(u,v) = 2$. Sehingga v adalah titik eksentrisitas dari u. Jadi $(u,v) \in ED(T)$. Misalkan titik-titik di T adalah $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan skor v_i adalah s_{v_i} . Tanpa mengurangi keumuman, misalkan barisan skor S: $s_{v_1} \leq s_{v_2} \leq \ldots \leq s_{v_n}$. Karena $\tilde{T}$ turnamen kekalahan T maka skor v_i di $\tilde{T}$ adalah $\tilde{s}_{v_i} = n - s_{v_i} - 1$ dan barisan skor $\tilde{T}$ adalah $\tilde{S}$: $n - s_{v_n} - 1 \leq n - s_{v_{n-1}} - 1 \leq \ldots \leq n - s_{v_1} - 1$. Akan dibuktikan bahwa $\tilde{T}$ juga turnamen kuat. Dengan menggunakan teorema 1 harus diperlihatkan bahwa

$$\sum_{i=n}^{1} \tilde{s}_{v_i} = \binom{n}{2} \text{ dan } \sum_{i=n}^{n-k+1} \tilde{s}_{v_i} > \binom{n-k+1}{2},$$

untuk $1 \leq k \leq n-1$.

Dengan menggunakan barisan skor S: $s_{v_1} \leq s_{v_2} \leq \ldots \leq s_{v_n}$ turnamen kuat T diperoleh

$$\sum_{i=n}^{1} \tilde{s}_{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(n - s_{v_i} - 1\right)$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} s_{v_i} - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= n^2 - \binom{n}{2} - n$$

$$= \binom{n}{2}.$$

Dari teorema 1, untuk $1 \le k \le n-1$,

$$\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{n} s_{v_i} = \sum_{i=1}^{n-k} s_{v_i} + \sum_{i=n}^{n-k+1} s_{v_i}$$

$$> \binom{n-k}{2} + \sum_{i=n}^{n-k+1} s_{v_i} .$$

Sehingga

$$- \sum_{i=n}^{n-k+1} s_{v_i} > \binom{n-k}{2} - \binom{n}{2}$$

Jadi untuk $1 \le k \le n-1$

$$\sum_{i=n}^{n-k+1} \tilde{s}_{v_i} = \sum_{i=n}^{n-k+1} \left(n - s_{v_i} - 1\right)$$

$$= n^2 - \sum_{i=n}^{n-k+1} s_{v_i} - n$$

$$> n^2 + \binom{n-k}{2} - \binom{n}{2} - n$$

$$= \binom{n-k}{2} + \binom{n}{2}$$

$$> \binom{n-k+1}{2}.$$

Ketidaksamaan yang terakhir diperoleh dari konstruksi berikut ini. Karena turnamen kuat tak trivial memiliki $n \ge 3$ dan $1 \le k \le n - 1$ maka berlaku

$$n^2 - 3n + 2k > 0$$

$$n^2 - 2n + k > n - k$$

$$(n-k)^2 - (n-k) + n^2 - n > (n-k)^2 - (n-k)$$

$$\frac{(n-k)^2 - (n-k) + n(n-1)}{2} > \frac{(n-k)^2 + (n-k)}{2}$$

$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} > \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

$$\binom{n-k}{2} + \binom{n}{2} > \binom{n-k+1}{2}. \square$$

Akibat 7

Misalkan T suatu turnamen kuat tak trivial orde n. Jika setiap dua titik di T termuat dalam lingkaran dengan panjang 3 maka digraf eksentris T periodik dengan $p(T) = 2$

Bukti:

Karena setiap dua titik di T termuat dalam lingkaran panjang 3, dengan teorema 5 dan 6 diperoleh $ED(T) = \tilde{T}$, dengan $\tilde{T}$ juga suatu turnamen kuat. Kemudian dengan melakukan proses yang sama pada $\tilde{T}$ diperoleh $ED(\tilde{T})$ adalah kekalahan dari $\tilde{T}$. Padahal kekalahan dari kekalahan T adalah T sendiri. Sehingga $ED^2(T) = ED(\tilde{T}) = T$.□

3. Daftar pustaka

Boland, J., dan Miller, M., 2001, **The eccentric digraph of a digraph**, *Proceeding of AWOCA '01*, Lembang-Bandung, Indonesia, 66-70.

Bollobas, B., 1998, **Modern graph theory**, Springer-Verlag, Berlin.

Buckley, F., 2002, **The eccentric digraph of a graph**, *Congressus Numerantium*, akan terbit.

Chartrand, G. dan Lesniak, L., 1996, **Graphs and Digraphs**, 3rd edition, Chapman & Hill, London

Harary, J., dan Moser, L., 1966, **The theory of round robin tournaments**, *American Mathematical Monthly* **73**, 231-246

Iswadi, H., 2003, **Digraf eksentris dari turnamen transitif dan regular**, 11 halaman, dikirim untuk diterbitkan di *Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, Unair

Jimenez, G., 1998, **Domination graphs of near-regular tournaments and the domination-compliance graph**, Dissertation, University of Colorado at Denver, Denver

Miller, M., Gimbert, J., Ruskey, F., and Ryan, J., 2002, **Iterations of eccentric digraphs**, *Proceeding of AWOCA '02*, Fraser Island, Australia.