Digraf dengan perioda 2

Hazrul Iswadi, Arif Herlambang, Heru Arwoko
Departemen Matematika dan IPA (MIPA)
Universitas Surabaya (UBAYA),
Jalan Raya Kalirungkut, Surabaya,
e-mail : us6179@wolf.ubaya.ac.id

Abstrak

Eksentrisitas $e(u)$ suatu titik u di digraf G adalah jarak maksimum dari u ke titik lain di G. *Titik eksentris* u adalah titik lain v di G yang memiliki jarak dari u sama dengan $e(u)$. *Digraf eksentris* $ED(G)$ dari digraf G adalah digraf yang memiliki titik yang sama dengan G dan terdapat busur u ke v jika dan hanya jika v titik eksentris u. Digraf eksentrisitas iterasi ke-k, untuk $k \geq 2$, dari digraf G ditulis sebagai $ED^k(G) = ED(ED^{k-1}(G))$, dengan $ED^1(G) = ED(G)$ dan $ED^0(G) = G$. Untuk setiap digraf G terdapat bilangan bulat terkecil $p > 0$ dan $t \geq 0$ sehingga $ED^t(G) = ED^{t+p}(G))$. Bilangan p disebut *perioda* (period) G, dinotasikan dengan $p(G)$, dan bilangan t disebut dengan *ekor* (tail) G, dinotasikan dengan $t(G)$. Digraf G disebut *periodik* jika $t(G) = 0$. Pada paper ini akan ditentukan suatu kelas digraf yang periodik dengan perioda 2.

***Kata-kunci**: eksentrisitas, digraf eksentris, digraf join, iterasi*

1. Pendahuluan

Definisi-definisi berikut berasal dari Chartrand dkk (1996) dan Bollobas (1998). Suatu *digraf* (directed graph) $G = G(V,A)$ adalah sebuah himpunan tak kosong berhingga $V = V(G)$ yang disebut dengan *titik-titik* dan himpunan pasangan terurut $A = A(G)$ dari titik-titik u dan v yang berbeda di V yang disebut dengan *busur-busur* dan ditulis dengan $a = (u,v)$. Kardinalitas himpunan titik $|V(G)|$ digraf G disebut dengan *orde* (order) G dan kardinalitas himpunan busur $|A(G)|$ digraf G disebut dengan *ukuran* (size) G. Digraf G dengan satu titik disebut dengan digraf trivial. Digraf lengkap K_n adalah digraf dengan orde n dan setiap titik terhubung dengan busur dua arah (busur simetri).

Jalan berarah W (directed walk) dengan panjang k di digraf G adalah barisan berhingga $W = v_0a_1v_1\ldots a_kv_k$ yang memiliki bentuk selang-seling titik dengan busur sehingga untuk $i = 1, 2,\ldots, k$ busur a_i mempunyai pangkal v_{i-1} dan akhir v_i. *Lintasan berarah* P (directed path) dengan panjang k di digraf G adalah jalan berarah dengan titik-titik $v_0, v_1, \ldots, v_k$ semuanya berbeda. Jika lintasan berarah $P = v_0a_1v_1\ldots a_kv_k$ diketahui dengan jelas seringkali ditulis dengan singkat sebagai lintasan berarah v_0-v_k. *Lingkaran berarah* (directed cycle) C_k dengan panjang k adalah sebuah lintasan berarah dengan titik awal v_0 sama dengan titik ujung v_k. Untuk selanjutnya jalan berarah, lintasan berarah, dan lingkaran berarah disingkat dengan menyebut sebagai jalan, lintasan, dan lingkaran. *Jarak* (distance) $d(u,v)$ antara titik u dan v adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u ke v. Didefinisikan $d(u,v) = \infty$ jika tidak ada lintasan yang menghubungkan u ke v. *Eksentrisitas* (eccentricity) $e(u)$ dari titik u adalah maksimum jarak dari u ke suatu titik lain di digraf G atau $e(u) = \max_{v \in G} d(u,v)$. Titik v adalah *titik eksentris* (vertex eccentric) dari u jika $d(u,v) = e(u)$.

Dari Parthasarathy (1994) diperoleh operasi biner antara dua digraf seperti berikut ini. Misalkan diketahui dua digraf $G_1(V_1,A_1)$ dan $G_2(V_2,A_2)$. Operasi *union* G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, adalah operasi biner untuk membentuk digraf G yang memiliki himpunan titik $V = V_1 \cup V_2$, dengan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dan himpunan busur $A = A_1 \cup A_2$. Sedangkan operasi *join* G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G_1 \vee G_2$, adalah operasi biner untuk membentuk digraf G yang memiliki himpunan titik $V = V_1 \cup V_2$, dengan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dan himpunan busur $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, dimana $A_3 \subseteq \{(u,v) | u \in V_1, v \in V_2 \text{ atau } v \in V_1, u \in V_2\}$.

Buckley (2001) mendefinisikan *digraf eksentris* (digraf eccentric) $ED(G)$ dari graf G sebagai suatu digraf yang mempunyai titik yang sama dengan G dan terdapat sebuah busur dari u ke v jika v adalah titik eksentris dari u. Buckley sampai pada kesimpulan " Untuk hampir semua graf G, digraf eksentrisnya adalah $ED(G) = (\overline{G})^*$", dengan $(\overline{G})^*$ menyatakan komplemen G dimana tiap sisi tak berarah diganti dengan dua busur simetri. Boland dkk (2001) memperkenalkan digraf eksentris dari sebuah digraf dengan beberapa pertanyaan terbuka tentang sifat dan eksistensi digraf eksentris bermacam-macam kelas dari digraf. Miller dkk (2002), memperkenalkan iterasi dari digraf eksentrisitas G. Diberikan bilangan bulat $k \geq 2$, digraf eksentrisitas iterasi ke-k G ditulis sebagai $ED^k(G) = ED(ED^{k-1}(G))$. Sedangkan $ED^1(G) = ED(G)$ dan $ED^0(G) = G$. Untuk setiap digraf G terdapat bilangan bulat terkecil $p > 0$ dan $t \geq 0$ sehingga $ED^t(G) = ED^{t+p}(G))$. Bilangan p disebut *periode* (period) G, dinotasikan dengan $p(G)$, dan bilangan t disebut dengan *ekor* (tail) G, dinotasikan dengan $t(G)$. Digraf G disebut *periodik* jika $t(G) = 0$.

Iswadi (2003a) dan (2003b) telah meneliti sifat periodik dari turnamen transitif, regular, dan kuat. Pada turnamen transitif T diperoleh $p(T) = 2$ dan $t(T) = 1$, turnamen regular T periodik dengan $p(T) = 2$, dan turnamen kuat periodik dengan $p(T) = 2$. Karena proses mencari digraf eksentris dari suatu digraf G beserta dengan iterasinya adalah proses rutin dan berulang-ulang maka diperlukan program komputer untuk memperoleh digraf eksentris beserta iterasinya dengan lebih cepat. Iswadi dkk (2003) memperkenalkan algoritma dan program untuk menentukan digraf eksentris beserta iterasinya. Di Iswadi dkk (2003) disebutkan juga bahwa dari hasil pengecekan dengan komputer ada turnamen yang memiliki ekor $t(T) = 0$, $t(T) = 1$, bahkan $t(T) = 11$. Tapi walaupun memiliki ekor yang berbeda-beda tetap didapatkan perioda $p(T) = 2$. Fenomena yang sama telah diperhatikan sebelumnya oleh Miller dkk (2002) dan kemudian menyatakan dalam konjektur berikut.

Konjektur 1: Untuk digraf acak dengan n titik dimana busur-busur dipilih secara acak dengan peluang q, dimana $0 < q < 1$, maka

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}_q\left((p(G) = 2)\right) = 1$$

Sehingga menarik untuk diteliti sifat-sifat dari digraf yang memiliki iterasi digraf eksentris-nya mulai berulang atau periodik. Sifat iterasi digraf eksentris dari suatu digraf ditentukan oleh sifat iterasi dari eksentrisitas titik-titik pada digraf tersebut. Di Iswadi (2003a) telah ditentukan sifat iterasi eksentrisitas dari titik pemancar dan penerima sebagai berikut.

Lema 1

Jika v suatu titik pemancar di digraf G maka v selalu menjadi titik pemancar pada $ED^k(G)$, untuk setiap $k \geq 0$

Lema 2

Jika v suatu titik penerima di digraf G maka v selalu menjadi titik pemancar pada $ED^k(G)$, untuk setiap $k \geq 1$

Pada bagian berikut ini akan ditentukan salah satu kelas digraf yang memiliki perioda 2.

2. Hasil

Jika G memuat titik pemancar u maka berdasarkan lema 1, titik u akan selalu menjadi titik pemancar pada $ED^k(G)$ untuk $k \geq 1$. Berikut ini akan ditunjukkan pengaruh titik pemancar pada iterasi digraf join antara titik-titik pemancar dengan digraf lain. Digraf *null* N_m yang berorde m didefinisikan sebagai union dari m buah digraf trivial. Kemudian digraf $N_m \vee G$ didefinisikan sebagai join dari digraf *null* N_m dengan suatu digraf G, dengan A_3 = $\{(u,v) | u \in V_1(N_m) \text{ dan } v \in V_2(G)\}$. Dari pendefinisian busur di A_3 di atas berarti titik-titik di N_m adalah titik-titik pemancar hanya pada titik-titik di digraf G.

Teorema 1

Jika setiap titik v pada digraf G yang berorde n memiliki eksentrisitas $e(v) < \infty$ maka digraf $N_m \vee G$ memiliki perioda $p(N_m \vee G) = 2$ dan ekor $t(N_m \vee G) = 1$

Bukti:

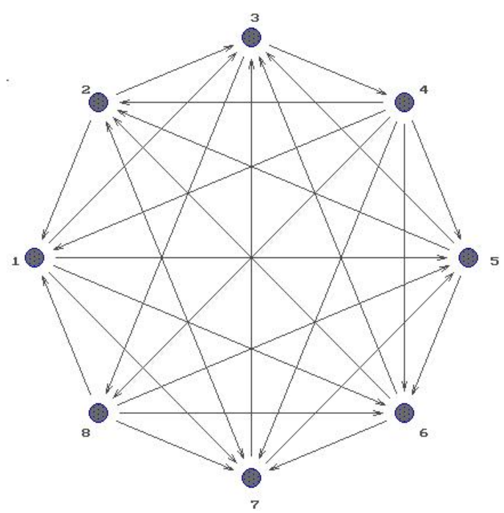
Misalkan himpunan titik digraf null N_m adalah $V_1 = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ dan himpunan titik digraf G adalah $V_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, dengan $e(v_j) < \infty$. Pada digraf $N_m \vee G$, semua titiknya mempunyai eksentrisitas ∞, dengan titik eksentris dari setiap u_i adalah titik lain di digraf N_m dan titik eksentris dari setiap v_j adalah semua titik u_i di digraf N_m. Sehingga pada $ED(N_m \vee G)$, setiap dua titik u_i di N_m terhubungkan oleh busur simetri dan setiap titik v_j di G menjadi pemancar hanya pada titik-titik di digraf N_m. Jadi $ED(N_m \vee G)$ sekarang dapat dipandang sebagai join dari digraf lengkap K_m dengan digraf null N_n atau $ED(N_m \vee G) = N_n \vee K_m$. Sekarang akan ditentukan $ED^2(N_m \vee G)$ atau $ED(N_n \vee K_m)$. Proses pembuktian pada kalimat sebelumnya dapat dipakai lagi pada $N_n \vee K_m$ karena eksentrisitas setiap titik u_i di digraf lengkap K_m adalah $e(u_i) = 1 < \infty$. Sehingga pada $ED(N_n \vee K_m)$, setiap dua titik v_j di digraf null N_n akan membentuk digraf lengkap K_n dan setiap titik u_i di digraf lengkap K_m menjadi pemancar hanya pada titik-titik di digraf N_n. Jadi $ED(N_n \vee K_m) = N_m \vee K_n$. Kemudian dengan mengulang proses sekali lagi untuk $N_m \vee K_n$ diperoleh $ED^2(N_n \vee K_m) = ED(N_m \vee K_n) = N_n \vee K_m$. Sehingga $ED^3(N_m \vee G) = ED(N_m \vee G)$. Jadi digraf $N_m \vee G$ memiliki perioda 2 dan ekor 1.□

Akibat 1

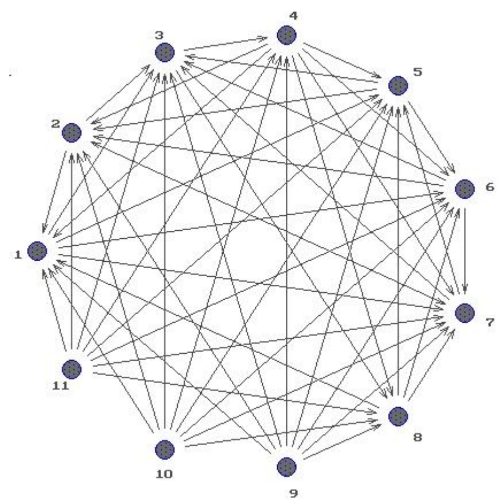
Digraf $N_m \vee K_n$ periodik dengan perioda 2

Bukti: Dengan menganti digraf G dengan digraf lengkap K_n akan diperoleh $ED^2(N_m \vee K_n) = ED(N_n \vee K_m) = N_m \vee K_n$. Jadi $N_m \vee K_n$ periodik dengan perioda 2. □

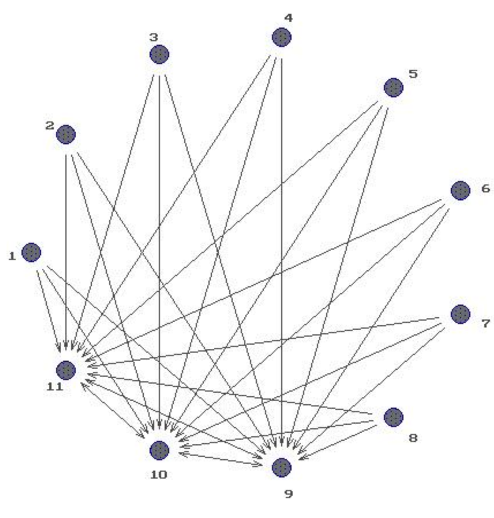
Gambar 1 berikut ini adalah ilustrasi untuk proses pembuktian teorema 1.



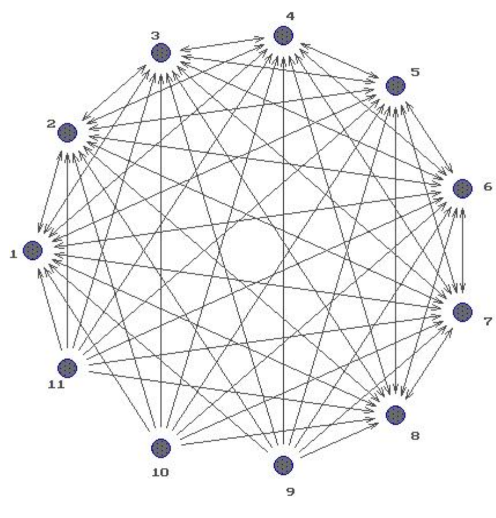
a. Digraf G



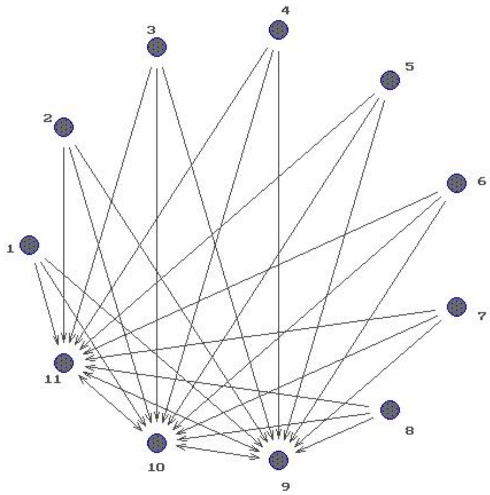
b. Digraf $N_3 \vee G$



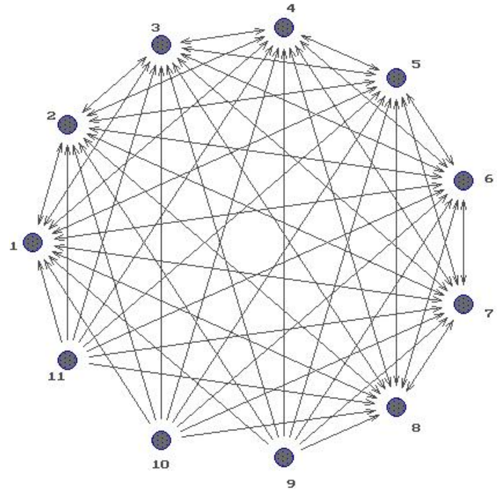
c. Digraf eksentris $ED(N_3 \vee G)$



d. Digraf eksentris $ED^2(N_3 \vee G)$



e. Digraf eksentris $ED^3(N_3 \vee G)$



f. Digraf eksentris $ED^4(N_3 \vee G)$

Gambar 1. Digraf G, digraf join $N_3 \vee G$, dan beberapa iterasi digraf eksentrisnya $N_3 \vee G$

Digraf G pada gambar 1a di atas memiliki orde 8 dengan titik-titiknya ditandai dengan angka 1,2, …, 8. Masing-masing titik di G mempunyai eksentrisitas 2, kecuali titik 8 yang mempunyai eksentrisitas 3. Sebelumnya telah dilakukan dengan menggunakan program yang ada di Iswadi dkk (2003), iterasi pada digraf eksentris dari digraf G didapatkan bahwa digraf G memiliki perioda $p(G) = 2$ dengan ekor $t(G) = 6$. Kemudian digraf G di-join-kan dengan digraf null N_3 yang memiliki tiga titik. Tiga titik pada N_3 ditandai dengan angka 9, 10, dan 11. Digraf join mereka dinotasikan dengan $N_3 \vee G$, seperti yang terlihat pada gambar 1b. Gambar 1c, 1d, 1e dan 1f berturut-turut adalah hasil iterasi digraf eksentris pada digraf $N_3 \vee G$ pada iterasi ke-1, ke-2, ke-3, dan ke-4 dengan menggunakan pertolongan program komputer. Terlihat bahwa iterasi ke-1 sama dengan iterasi ke-3 dan iterasi ke-2 sama dengan iterasi ke-4. Jadi digraf $N_3 \vee G$ memiliki perioda $p(N_3 \vee G) = 2$ dengan ekor $t(N_3 \vee G) = 1$.

3. Daftar pustaka

Boland, J., dan Miller, M., 2001, The eccentric digraph of a digraph, *Proceeding of AWOCA ‘01,* Lembang-Bandung, Indonesia, pp. 66-70

Bollobas, B., 1998, **Modern graph theory**, Springer-Verlag, Berlin

Buckley, F., 2001, The eccentric digraph of a graph, *Congressus Numerantium* **149**, pp.65-69

Chartrand, G. dan Lesniak, L., 1996, **Graphs and Digraphs**, 3rd edition, Chapman & Hill, London

Iswadi, H., 2003a, Digraf eksentris dari turnamen transitif dan regular, *Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, vol. 8, no. 2. akan terbit

Iswadi, H., 2003b, Digraf eksentris dari turnamen kuat, *Jurnal Matematika Aplikasi dan Pembelajarannya*, vol. 2, no. 1, pp. 158-162.

Iswadi, H., Herlambang, A., dan Arwoko, H., 2003, Masalah dan algoritma digraf eksentris dari digraf, *Unitas: Bulletin ilmiah Universitas Surabaya*, vol.11, no. 2, akan terbit

Miller, M., Gimbert, J., Ruskey, F., and Ryan, J., 2002, **Iterations of eccentric digraphs**, *Proceeding of AWOCA ’02*, Fraser Island, Australia.

Parthasarathy, K. R., 1994, **Basic Graph Theory**, Tata McGraw-Hill Pub. Co. Ltd., New Delhi.