

# Digraf Eksentris Turnamen Tereduksi

Hazrul Iswadi

Departemen MIPA Ubaya

Jalan Raya Kalirungkut Surabaya

## Abstrak

*Turnamen tereduksi*  $T$  adalah turnamen yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sub himpunan  $A$  dan  $B$  dimana setiap titik di sub himpunan  $A$  mengalahkan setiap titik di sub himpunan  $B$ . *Digraf eksentris*  $ED(T)$  dari turnamen  $T$  adalah digraf yang memiliki titik yang sama dengan  $T$  dan terdapat busur  $u$  ke  $v$  jika dan hanya jika  $v$  adalah titik dengan jarak terjauh dari  $u$ . Pada tulisan ini akan dibahas sifat-sifat digraph eksentris turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen yang diinduksi oleh sub himpunan  $A$  dan  $B$  diganti menjadi kelas turnamen yang khusus yaitu turnamen regular dan transitif.

*Kata-kata kunci:* turnamen, tereduksi, regular, transitif, eksentris, perioda

## Pendahuluan

Suatu *digraf* (directed graph)  $G = G(V,E)$  adalah sebuah himpunan tak kosong berhingga  $V = V(G)$  yang disebut dengan *titik-titik* dan himpunan pasangan terurut  $E = E(G)$  dari titik-titik  $u$  dan  $v$  yang berbeda di  $V$  yang disebut dengan *busur-busur* dan ditulis dengan  $a = (u,v)$ .

Buckley mendefinisikan *digraf eksentris* (eccentric digraph)  $ED(G)$  dari graf  $G$  sebagai suatu digraf yang mempunyai titik yang sama dengan  $G$  dan terdapat sebuah busur dari  $u$  ke  $v$  jika  $v$  adalah titik eksentris dari  $u$  [2]. Buckley sampai pada kesimpulan “Untuk hampir semua graf  $G$ , digraf eksentrisnya adalah  $ED(G) = (\overline{G})^*$ ”, dengan  $(\overline{G})^*$  menyatakan komplemen  $G$  dimana tiap sisi tak berarah diganti dengan dua busur simetri. Boland dkk memperkenalkan digraf eksentris dari sebuah digraf dengan beberapa pertanyaan terbuka tentang sifat dan eksistensi digraf eksentris bermacam-macam kelas dari digraf [1]. Miller dkk memperkenalkan iterasi dari digraf eksentrisitas  $G$ . Diberikan bilangan bulat  $k \geq 2$ , digraf eksentrisitas iterasi ke- $k$   $G$  ditulis sebagai  $ED^k(G) = ED(ED^{k-1}(G))$ . Sedangkan  $ED^1(G) = ED(G)$  dan  $ED^0(G) = G$ . Untuk setiap digraf  $G$  terdapat bilangan bulat terkecil  $p > 0$  dan  $t \geq 0$  sehingga  $ED^t(G) = ED^{t+p}(G)$ .

Bilangan  $p$  disebut *periode* (period)  $G$ , dinotasikan dengan  $p(G)$ , dan bilangan  $t$  disebut dengan *ekor* (tail)  $G$ , dinotasikan dengan  $t(G)$ . Digraf  $G$  disebut *periodik* jika  $t(G) = 0$  [10].

Konsep digraf eksentris  $ED(G)$  dari suatu digraf  $G$  akan menjadi bermakna dalam kehidupan sehari-hari jika digraf  $G$  adalah turnamen. Karena mencari digraf eksentris dari suatu turnamen berarti menentukan lawan-lawan yang paling sulit dikalahkan dalam sebuah turnamen.

Definisi dan istilah yang berkaitan dengan turnamen berikut ini diambilkan dari Chartrand dan Lesniak [3] dan Jimenez [8]. Sebuah *turnamen*  $T = (V, E)$  berorde  $n$  adalah sebuah digraf tanpa loop sedemikian sehingga tiap pasang titik-titik  $i$  dan  $j$  dihubungkan dengan tepat satu busur  $(i,j)$  atau  $(j,i)$ . Jika  $(i,j) \in E$  maka disebut  $i$  mendominasi  $j$  dan  $j$  didominasi oleh  $i$ . *Derajat keluar* (out-degree)  $\deg^+(i)$  dari suatu titik  $i$  pada turnamen  $T$  adalah jumlah titik-titik yang didominasi oleh  $i$ . *Derajat masuk* (in-degree)  $\deg^-(i)$  dari suatu titik  $i$  pada turnamen  $T$  adalah jumlah titik-titik yang mendominasi  $i$ .

Dalam turnamen setengah kompetisi (round-robin tournament), derajat keluar  $\deg^+(i)$  dari suatu titik  $i$  adalah jumlah kemenangan yang dicapai pemain  $i$ , dengan alasan kedekatan istilah, maka derajat keluar  $\deg^+(i)$  suatu titik  $i$  sering disebut dengan *skor*  $s_i$ . Berikut ini beberapa definisi yang berkaitan dengan skor turnamen. Sebuah titik  $i$  di turnamen  $T$  yang berorde  $n$  disebut *pemancar* (transmitter)  $i$  jika mempunyai skor  $s_i = n-1$  dan disebut *penerima* (receiver) jika mempunyai skor  $s_i = 0$ . *Kekalahan* (reversal)  $\tilde{T}$  dari suatu turnamen  $T$  adalah turnamen yang diperoleh dari  $T$  dengan membalik semua arah busurnya. Sehingga kekalahan dari kekalahan  $\tilde{T}$  adalah  $T$  sendiri. Sebuah turnamen tak trivial dengan orde  $n$  disebut *regular* jika  $n$  ganjil dan setiap titik mempunyai skor  $s_i = \frac{n-1}{2}$ . Turnamen  $T$  disebut *transitif* (transitive) jika  $(u,v)$  dan  $(v,w)$  busur-busur di  $T$  maka  $(u,w)$  juga busur di  $T$ . *Barisan skor* turnamen adalah barisan skor  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$  dari titik-titiknya.

Turnamen menjadi menarik untuk dibahas tidak saja karena luasnya aplikasi pada kehidupan sehari-hari tapi juga karena kompleksitas masalah seiring dengan

meningkatnya orde suatu turnamen. Model turnamen yang muncul dalam berbagai fenomena kehidupan sehari-hari antara lain pola hubungan saling menguasai dalam sekelompok ayam jantan seperti yang di bahas pertama kali oleh ahli sosiologi H.G. Landau [9], atau menentukan pemenang dan skor pada pertandingan setengah kompetisi. Jumlah turnamen yang non isomorfis meningkat dengan tajam seiring dengan peningkatan jumlah titiknya. Sebagai contoh, hanya ada satu turnamen orde 1, ada satu turnamen orde 2, ada dua turnamen orde 3, ada 4 turnamen orde 4, ada 12 turnamen orde 5, 56 turnamen orde 6, dan lebih dari 154 juta untuk turnamen orde 12 [3].

Sifat-sifat digraf eksentris turnamen-turnamen bentuk khusus telah dibahas beberapa kali oleh Iswadi [4, 5, 6, 7]. Di [4], dibahas sifat-sifat digraf eksentris dari turnamen transitif dan regular, di [5] dibahas sifat-sifat digraf eksentris dari turnamen kuat, yaitu turnamen  $T$  yang memiliki sifat jika untuk setiap pasangan titik  $v_i$  dan  $v_j$  di  $T$  selalu terdapat lintasan  $v_i-v_j$  dan  $v_j-v_i$ , di [6] dibahas algoritma dan program yang dibuat untuk menentukan digraf eksentris dari sebuah digraf sehingga dimungkinkan menentukan iterasi digraf eksentris ke- $n$ , dan di [7] dibahas sifat-sifat digraf eksentris dari digraf join turnamen dengan digraf null.

Pada tulisan ini akan diteliti sifat-sifat digraf eksentris dari turnamen tereduksi  $T$  yaitu sebuah turnamen yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua himpunan  $A$  dan  $B$  dimana setiap titik di himpunan  $A$  mengalahkan setiap titik di himpunan  $B$ . Dari sifat turnamen yaitu setiap dua titik terhubung dengan busur maka sub himpunan  $A$  dan  $B$  akan menginduksi sub turnamen  $A$  dan  $B$  yaitu sub turnamen yang titik-titiknya berasal dari titik-titik pada sub himpunan  $A$  dan  $B$  dan busur yang menghubungkan dua titik pada sub himpunan tersebut adalah busur yang berasal dari turnamen  $T$ .

Tulisan ini melanjutkan hal yang sudah diperoleh pada tulisan-tulisan di atas terutama tulisan [4]. Pada tulisan ini, penulis meninjau sifat-sifat digraf eksentris dari turnamen tereduksi  $T$  dengan mengantikan sub turnamen  $A$  dan  $B$  dengan turnamen regular atau transitif.

## Sifat periodik suatu digraf

Kardinalitas himpunan titik  $|V(G)|$  digraf  $G$  disebut dengan *orde* (order)  $G$  dan kardinalitas himpunan busur  $|E(G)|$  digraf  $G$  disebut dengan *ukuran* (size)  $G$ . Digraf  $G$  dengan satu titik disebut dengan *digraf trivial*. Digraf  $G$  yang hanya terdiri dari himpunan titik dan tidak memiliki busur disebut dengan *digraf null*, dinotasikan dengan  $N$ . Digraf  $G$  yang terdiri dari himpunan titik yang lebih dari satu dan setiap dua titik dihubungkan oleh busur bolak-balik disebut dengan *digraf lengkap*, dinotasikan dengan  $K$ . Pendefinisian *graf*  $G$  hampir sama dengan digraf kecuali himpunan pasangan terurut diganti dengan himpunan pasangan tak terurut yang disebut dengan *sisi-sisi*. Digraf  $G_1$  dikatakan *isomorfis* dengan digraf  $G_2$  jika terdapat pemetaan satu-satu  $\Phi$ , yang disebut dengan *isomorfisma*, dari  $V(G_1)$  pada  $V(G_2)$  sehingga  $(u,v) \in E(G_1)$  jika dan hanya jika  $(\Phi(u),\Phi(v)) \in E(G_2)$ . Jika digraf  $G_1$  *isomorfis* dengan digraf  $G_2$  maka ditulis dengan  $G_1 \cong G_2$ .

*Jalan berarah*  $W$  (directed walk) dengan panjang  $k$  di digraf  $G$  adalah barisan berhingga  $W = v_0a_1v_1\dots a_kv_k$  yang memiliki bentuk selang-seling titik dengan busur sehingga untuk  $i = 1, 2, \dots, k$  busur  $a_i$  mempunyai pangkal  $v_{i-1}$  dan akhir  $v_i$ . *Lintasan berarah*  $P$  (directed path) dengan panjang  $k$  di digraf  $G$  adalah jalan berarah dengan titik-titik  $v_0, v_1, \dots, v_k$  semuanya berbeda. Jika lintasan berarah  $P = v_0a_1v_1\dots a_kv_k$  diketahui dengan jelas seringkali ditulis dengan singkat sebagai lintasan berarah  $v_0-v_k$ . *Lingkaran berarah* (directed cycle)  $C_k$  dengan panjang  $k$  adalah sebuah lintasan berarah dengan titik awal  $v_0$  sama dengan titik ujung  $v_k$ . Untuk selanjutnya jalan berarah, lintasan berarah, dan lingkaran berarah disingkat dengan menyebut sebagai jalan, lintasan, dan lingkaran.

*Jarak* (distance)  $d(u,v)$  antara titik  $u$  dan  $v$  adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan  $u$  ke  $v$ . Didefinisikan  $d(u,v) = \infty$  jika tidak ada lintasan yang menghubungkan  $u$  ke  $v$ . *Eksentrisitas* (*eccentricity*)  $e(u)$  dari titik  $u$  adalah maksimum jarak dari  $u$  ke suatu titik lain di digraf  $G$  atau  $e(u) = \max_{v \in G} d(u,v)$ . Titik  $v$  adalah *titik eksentris* (*vertex eccentric*) dari  $u$  jika  $d(u,v) = e(u)$ .

Iswadi [4] dan [5] telah meneliti sifat periodik dari turnamen transitif, regular, dan kuat. Pada turnamen transitif  $T$  diperoleh  $p(T) = 2$  dan  $t(T) = 1$ , turnamen regular  $T$

periodik dengan  $p(T) = 2$ , dan turnamen kuat periodik dengan  $p(T) = 2$ . Iswadi dkk [6] memperkenalkan algoritma dan program untuk menentukan digraf eksentris beserta iterasinya. Di Iswadi dkk [6] disebutkan juga bahwa dari hasil pengecekan dengan komputer ada turnamen yang memiliki ekor  $t(T) = 0$ ,  $t(T) = 1$ , bahkan  $t(T) = 11$ . Walaupun memiliki ekor yang berbeda-beda tetapi didapatkan perioda  $p(T) = 2$ . Fenomena yang sama telah diperhatikan sebelumnya oleh Miller dkk [10] dan kemudian menyatakan dalam konjektur berikut.

**Konjektur 1:**

Untuk digraf acak  $G$  dengan  $n$  titik dimana busur-busur dipilih secara acak dengan peluang  $q$ , dimana  $0 < q < 1$ , maka

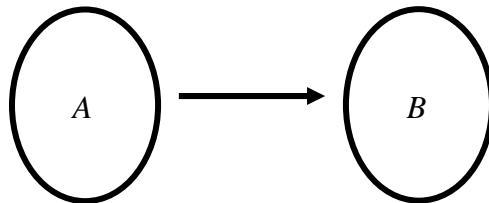
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}_q \left( (p(G) = 2) \right) = 1$$

Konjektur tersebut sangat sulit dibuktikan untuk sebarang digraf  $G$ , sehingga upaya yang dilakukan oleh para ahli teori graf adalah dengan membuktikan bahwa konjektur tersebut dipenuhi untuk kelas-kelas khusus dari digraf. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa karena digraf eksentris mempunyai makna dalam kehidupan sehari-hari jika dilakukan pada turnamen dan kompleksitas turnamen yang menantang maka penelitian berikutnya tentang sifat periodik digraf eksentris banyak dilakukan pada turnamen.

Pada tulisan ini, karena alasan lebih fleksibel, penulis menggunakan software Grin (Graph Interface) yang dibuat oleh Petchenkine Vitali, seorang ahli ekonomi dari Rusia. Walaupun software ini tidak langsung dapat menunjukkan digraf eksentris dari suatu digraf, tapi informasi tentang semua jarak dari suatu titik  $x$  ke titik lain di digraf  $G$  dan kemudahan membuat dan mengedit sebuah digraf sangat membantu dalam melakukan penelitian ini. Software Grin dapat di download secara gratis di [http://www.geocities.com/pechv\\_ru/main.html](http://www.geocities.com/pechv_ru/main.html) atau link dari personal homepage penulis di [http://www.geocities.com/hazrul\\_iswadi/home.html](http://www.geocities.com/hazrul_iswadi/home.html).

## Hasil-hasil baru

Misalkan himpunan titik turnamen tereduksi  $T$  dipartisi menjadi dua himpunan  $A$  dan  $B$  dimana setiap titik di  $A$  mengalahkan semua titik di  $B$ . Secara skema turnamen tereduksi  $T$  digambarkan sebagai berikut:



**Gambar 1** Skema turnamen tereduksi  $T$  yang memiliki partisi himpunan  $A$  dan  $B$

Arah tanda panah pada gambar di atas menyatakan arah setiap titik pada himpunan  $A$  mengalahkan setiap titik pada himpunan  $B$ . Seperti yang telah dijelaskan di bagian pendahuluan bahwa sub himpunan  $A$  dan  $B$  akan menginduksi sub turnamen  $A$  dan  $B$  yaitu sub turnamen yang titik-titiknya berasal dari titik-titik pada sub himpunan  $A$  dan  $B$  dan busur yang menghubungkan dua titik pada sub himpunan tersebut adalah busur yang berasal dari turnamen  $T$ . Untuk mempersingkat penulisan yang berulang-ulang maka sub turnamen  $T$  yang diinduksi oleh himpunan titik  $A$  dan  $B$  secara berturut-turut disebut sebagai sub turnamen  $A$  dan  $B$  saja.

Berikut ini beberapa sifat digraf eksentris pada turnamen tereduksi  $T$ .

### Teorema 1

Jika untuk setiap  $x \in V(A)$ ,  $e(x) > 1$  pada turnamen tereduksi  $T$  maka  $(x, z) \in ED(T)$  untuk  $z$  titik lain di  $V(A)$  dan  $(x, y) \notin ED(T)$  untuk setiap titik  $y \in V(B)$

#### Bukti:

Misalkan  $x \in V(A)$  dan  $e(x) > 1$ . Karena  $d(x, y) = 1$  untuk setiap  $y \in V(B)$  maka  $y$  bukan titik eksentris  $x$ . Titik eksentris  $x$  adalah titik lain  $z \in V(A)$ . ●

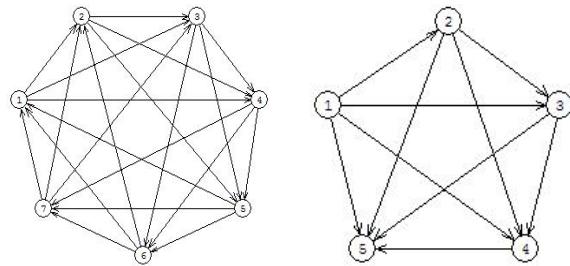
### Teorema 2

Jika untuk setiap  $x \in V(B)$ ,  $e(x)$  berhingga pada sub turnamen  $B$  maka sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$  adalah turnamen trivial dan  $(x, y) \in ED(T)$  untuk setiap titik  $y \in V(A)$

#### Bukti:

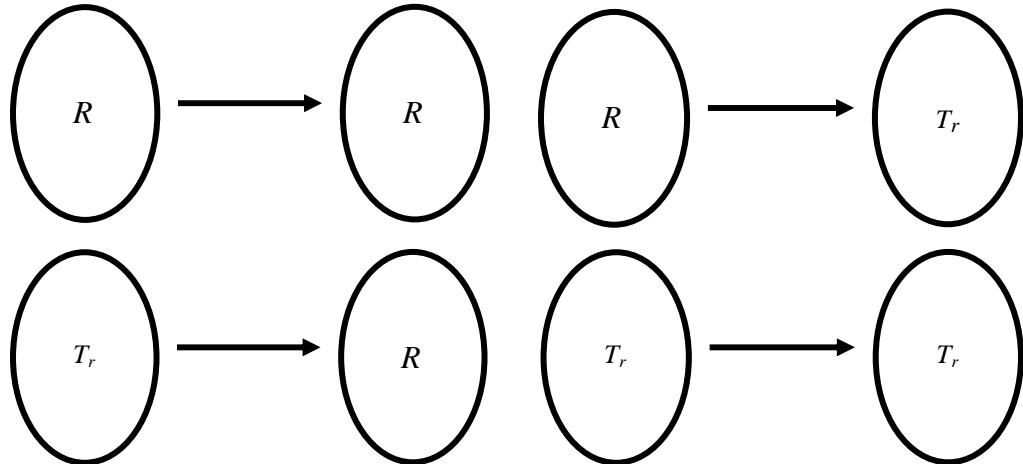
Misalkan  $x \in V(B)$  dan  $e(x)$  berhingga pada sub turnamen  $B$ . Karena  $d(x, y) = \infty$  untuk setiap  $y \in V(A)$  maka  $e(x) = \infty$  di  $T$  dan titik eksentris  $x$  adalah setiap titik  $y$  di  $V(A)$ . Kemudian karena  $e(x)$  berhingga  $< \infty$  untuk setiap  $x$  pada sub turnamen  $B$  maka  $(x, z) \notin ED(T)$  untuk setiap titik lain  $z \in V(B)$ . ●

Teorema-teorema yang akan dibahas berikut akan memperlihatkan sifat digraf eksentris dari turnamen tereduksi  $T$  dimana sub turnamen yang diinduksi oleh himpunan titik  $A$  dan  $B$  berbentuk turnamen regular atau turnamen transitif. Gambar 2 adalah gambar turnamen regular orde 7 dan turnamen transitif orde 5.



**Gambar 2** Turnamen transitif  $T$  dengan orde 4, 5, dan 6

Misalkan  $R$  adalah turnamen regular dan  $S$  adalah turnamen kuat dengan masing-masing secara berturut-turut mempunyai kekalahan  $\tilde{R}$  dan  $\tilde{S}$ . Jika sub turnamen  $A$  dan  $B$  pada turnamen tereduksi  $T$  diganti menjadi turnamen regular atau turnamen transitif maka akan diperoleh 4 bentuk turnamen tereduksi  $T$  yang secara skema dapat digambar sebagai berikut:



**Gambar 3** Empat bentuk turnamen tereduksi

### Teorema 3

Jika sub turnamen  $A$  dan  $B$  pada turnamen tereduksi  $T$  berbentuk turnamen regular maka  $t(T) = 2$  dan  $p(T) = 2$

**Bukti:**

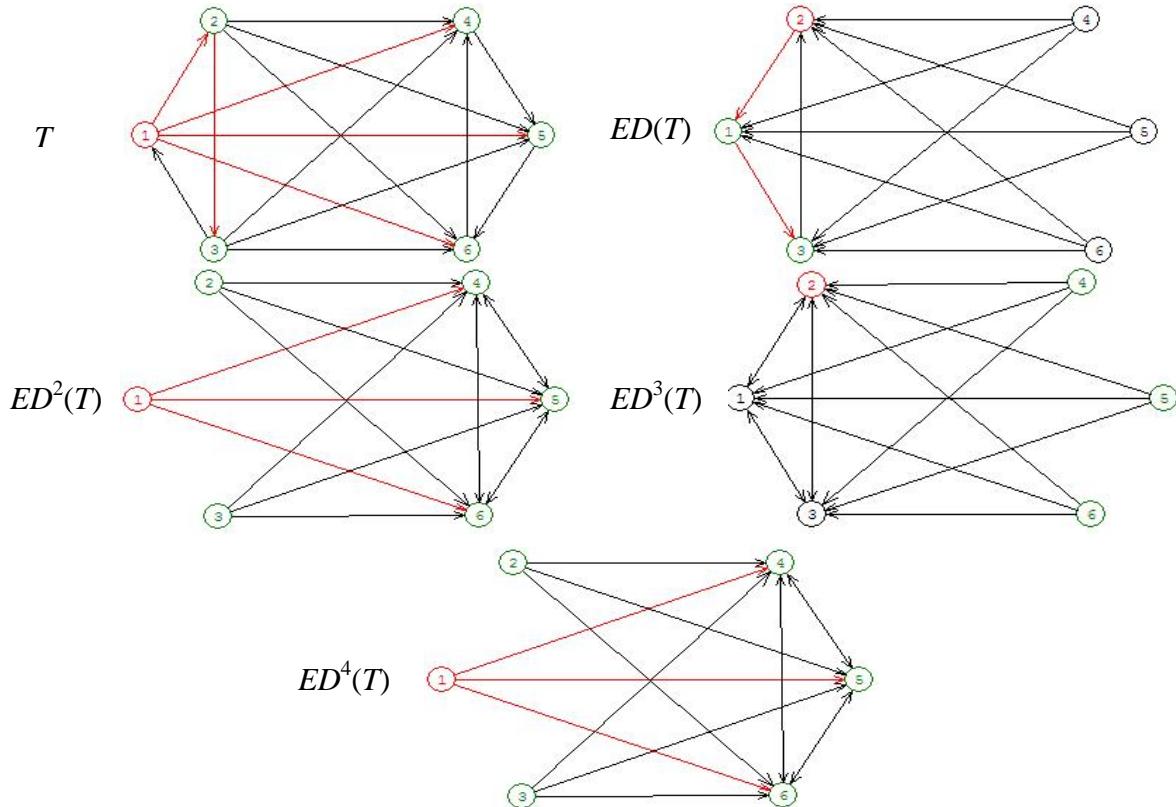
Pada pembuktian teorema 10 di [4], diketahui bahwa  $e(x) = 2$  untuk setiap  $x$  pada tiap-tiap sub turnamen  $A$  dan  $B$ . Dengan mengingat setiap titik di  $A$  mengalahkan setiap titik di  $B$  maka untuk setiap  $x \in V(A)$  memiliki eksentrisitas  $e(x) > 1$  pada turnamen tereduksi  $T$ . Kemudian untuk setiap  $x \in V(B)$  memiliki eksentrisitas  $e(x)$  berhingga pada sub turnamen  $B$ . Jadi setiap titik  $x \in V(A)$  memenuhi syarat pada teorema 1 dan setiap titik  $x \in V(B)$  memenuhi syarat pada teorema 2. Jadi untuk setiap titik  $x$  pada sub turnamen  $A$ , titik eksentris adalah titik lain di  $V(A)$ , lebih jauh titik tersebut adalah titik  $y \in V(B)$  dengan  $(x, y) \notin E(T)$ . Sehingga sub turnamen  $A$  di  $ED(T)$  adalah kekalahan  $\tilde{R}$ . Sedangkan untuk setiap titik  $x$  pada sub turnamen  $B$ , titik eksentris adalah semua titik di  $V(A)$ . Sehingga sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$  adalah digraf null dengan orde  $|V(B)|$ . Kemudian arah mengalahkan di  $ED(T)$  menjadi dari sub turnamen  $B$  ke sub turnamen  $A$ .

Berdasarkan teorema 10 di [4], kekalahan  $\tilde{R}$  pada  $ED(T)$  adalah turnamen regular juga. Sehingga kondisi sub turnamen  $A$  di  $ED^2(T)$  berubah peran seperti sub turnamen  $B$  di  $T$ . Sehingga untuk setiap titik  $x$  pada sub turnamen  $A$ , titik eksentris adalah semua titik di  $V(B)$  dan sub turnamen  $A$  menjadi digraf null dengan orde  $|V(A)|$ . Karena setiap titik  $x$  di sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$  memenuhi asumsi pada teorema 1, dan  $d(x, y) = \infty$  untuk setiap titik lain  $y \in V(B)$  maka sub turnamen  $B$  di  $ED^2(T)$  berbentuk digraf lengkap dengan  $|V(B)|$ . Kemudian arah mengalahkan di  $ED^2(T)$  menjadi dari sub turnamen  $A$  ke sub turnamen  $B$ .

Kondisi sub turnamen  $A$  di  $ED^2(T)$  sama persis dengan kondisi sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$ , sehingga berlaku hasil pada paragraf sebelumnya dimana sub turnamen  $A$  akan menjadi digraf lengkap dengan orde  $|V(A)|$  di  $ED^3(T)$ . Kemudian kondisi sub turnamen  $B$  di  $ED^2(T)$  memenuhi asumsi teorema 2, sehingga berdasarkan pembuktian sebelumnya maka sub turnamen  $B$  menjadi digraf null dengan orde  $|V(B)|$  dan arah mengalahkan di  $ED^3(T)$  menjadi dari sub turnamen  $B$  ke sub turnamen  $A$ .

Kondisi sub turnamen  $A$  dan  $B$  di  $ED^3(T)$  sama persis dengan kondisi di  $ED(T)$  sehingga jika dilakukan satu iterasi digraf eksentris pada  $ED^3(T)$  akan diperoleh  $ED^2(T)$ . Jadi  $ED^4(T) = ED^2(T)$ . Jadi  $t(T) = 2$  dan  $p(T) = 2$ .  $\bullet$

Untuk lebih memperjelas penggunaan teorema 3 diatas, berikut ini rangkaian gambar dari digraf eksentris iterasi ke-0, 1, 2, 3, dan 4 dari turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen keduanya turnamen regular orde 3.



**Gambar 5** Digraf eksentris iterasi ke-0, 1, 2, 3, dan 4 dari turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen keduanya turnamen regular orde 3

#### Teorema 4

Jika sub turnamen  $A$  dan  $B$  pada turnamen tereduksi  $T$  berturut-turut berbentuk turnamen regular dan turnamen transitif maka  $t(T) = 2$  dan  $p(T) = 2$

**Bukti:**

Karena kondisi sub turnamen  $A$  di  $T$  pada teorema ini sama dengan kondisi sub turnamen  $A$  di  $T$  pada teorema 3 maka sub turnamen  $A$  di  $ED(T)$  berbentuk kekalahan  $\tilde{R}$ . Sedangkan kondisi untuk sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$  akan ditunjukkan dengan membuktikan klaim berikut:

klaim: sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$  adalah kekalahan  $\tilde{B}$  dan  $(x, y) \in ED(T)$ , untuk setiap

$$x \in V(B) \text{ dan } y \in V(A)$$

Akan ditunjukkan

- 1). jika  $(u, v)$  busur di  $B$  maka  $(u, v) \notin ED(T)$  atau jika  $(u, v)$  bukan busur di  $B$  maka  $(u, v) \in ED(T)$ .

- 2). titik eksentris untuk setiap  $x \in V(B)$  adalah setiap titik  $y \in V(A)$

Karena setiap titik sub turnamen  $A$  mengalahkan setiap titik sub turnamen  $B$  maka  $e(u) = \infty$  untuk setiap titik  $u \in V(B)$ . Sehingga jika  $(u, v)$  busur di  $B$  maka  $(u, v) \notin ED(T)$ . Berdasarkan sifat turnamen transitif yang asiklik, jika  $(u, v)$  bukan busur di  $B$  maka  $d(u, v) = \infty$ . Jadi  $v$  adalah titik eksentris dari  $u$ . Lebih jauh, titik eksentris dari  $x$  di  $V(B)$  adalah setiap titik  $y$  di  $V(A)$ .

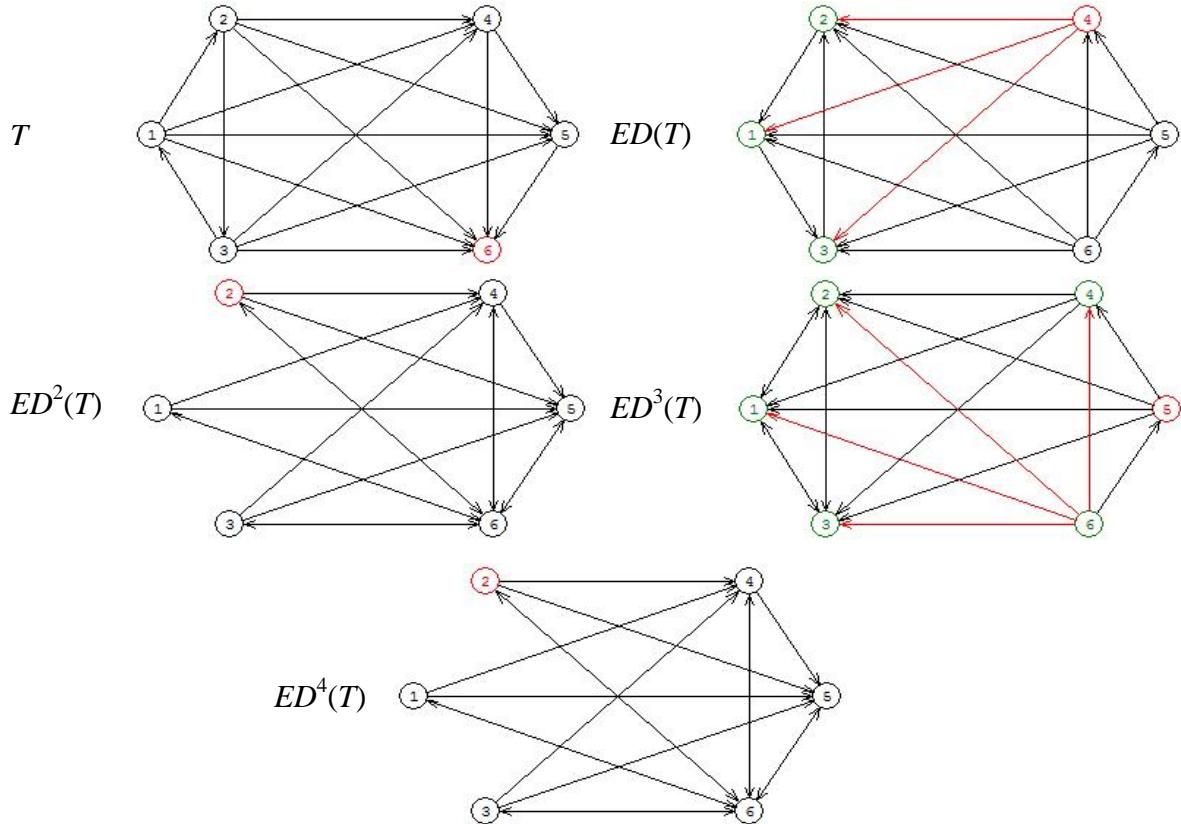
Kondisi sub turnamen  $A$  di  $ED(T)$  juga serupa dengan kondisi sub turnamen  $A$  di  $ED(T)$  pada teorema 3, sehingga sub turnamen  $A$  menjadi digraf null orde  $|V(A)|$  di  $ED^2(T)$  dan untuk setiap  $x$  di  $A$  dan  $y$  di  $B$ ,  $(x, y) \in ED^2(T)$ . Pada sub turnamen  $B$ , titik penerima di  $T$  dengan hasil pada paragraph di atas berubah menjadi titik pemancar di  $ED(T)$ . Berdasarkan teorema 6 di [4], titik pemancar di  $ED(T)$  akan selalu menjadi titik pemancar di  $ED^k(T)$ , untuk  $k \geq 2$ . Titik-titik  $u$  selain pemancar di sub turnamen  $B$  mempunyai  $e(u) = \infty$  dan titik eksentris  $u$  adalah titik lain  $v$  di  $B$  dengan  $(u, v)$  bukan busur di  $ED(T)$ .

Pada  $ED^2(T)$ , titik pemancarnya menjadi titik penghubung untuk setiap dua titik  $x$  dan  $y$  dengan  $(x, y) \notin ED^2(T)$ . Kondisi sub turnamen  $A$  di  $ED^2(T)$  serupa dengan kondisi sub turnamen  $A$  di  $ED^2(T)$  pada teorema 3, kecuali bahwa setiap titik  $x$  di  $A$  memiliki  $e(u) = 2$  dan untuk setiap  $x$  dan  $y$  di  $A$ ,  $d(x, y) = 2$ . Jadi untuk setiap  $x$  dan  $y$  di  $A$  maka  $(x, y) \in ED^3(T)$ . Untuk sub turnamen  $B$ , setiap titik  $x$  yang bukan titik pemancar di  $ED^2(T)$  memiliki sifat  $d(x, y) = 2$ , dengan  $y$  titik lain di  $B$  yang bukan pemancar. Titik eksentris  $x$  adalah titik lain di  $B$  yang bukan pemancar dan setiap titik di  $A$ .

Kondisi sub turnamen  $A$  di  $ED^3(T)$  serupa dengan kondisi sub turnamen  $A$  di  $ED^3(T)$  pada teorema 3, sehingga sub turnamen  $A$  menjadi turnamen null orde  $|V(A)|$  di  $ED^4(T)$  dan untuk setiap  $x$  di  $A$  dan  $y$  di  $B$ ,  $(x, y) \in ED^4(T)$ . Kemudian kondisi sub

turnamen  $B$  di  $ED^3(T)$  serupa dengan kondisi sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$ . Jadi struktur digraf eksentris  $ED^4(T)$  sama dengan digraf eksentris  $ED^2(T)$ . Jadi  $t(T) = 2$  dan  $p(T) = 2$ .  $\blacksquare$

Berikut ini rangkaian gambar dari digraf eksentris iterasi ke-0, 1, 2, 3, dan 4 dari turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen  $A$  adalah turnamen regular orde 3 dan sub turnamen  $B$  adalah turnamen transitif orde 3.



**Gambar 7** Digraf eksentris iterasi ke-0, 1, 2, 3, dan 4 dari turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen  $A$  dan masing-masing regular orde 3 dan transitif orde 3

### Teorema 5

Jika sub turnamen  $A$  dan  $B$  pada turnamen tereduksi  $T$  berturut-turut berbentuk turnamen transitif dan turnamen regular maka  $t(T) = 1$  dan  $p(T) = 2$

**Bukti:**

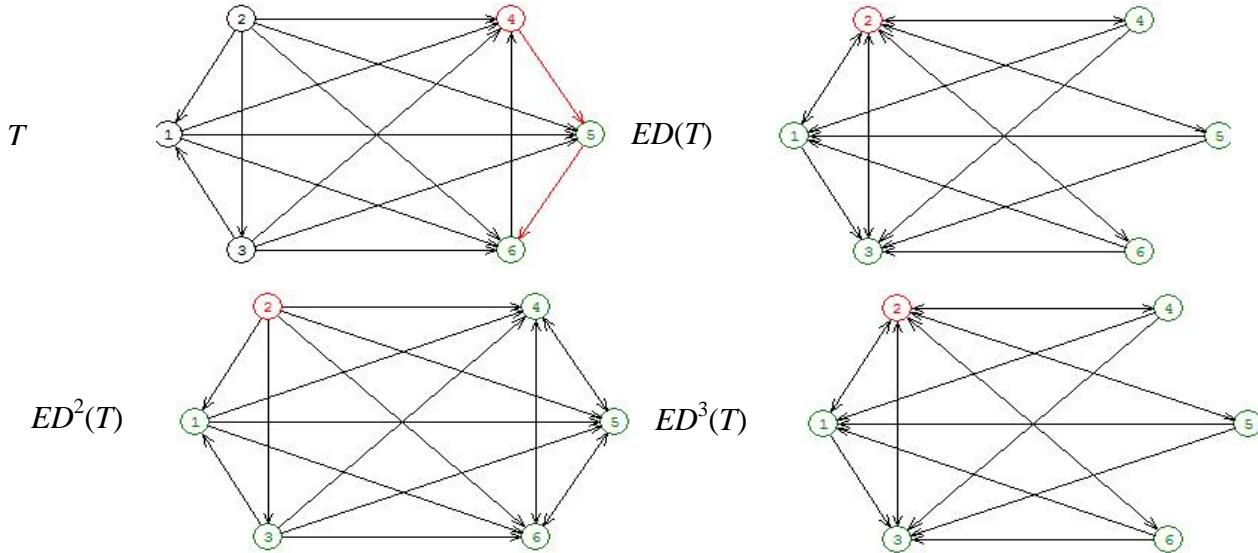
Pada sub turnamen  $A$ , titik pemancar sub turnamen  $A$  menjadi titik pemancar di  $T$ . Berdasarkan lema 1, titik pemancar ini akan selalu menjadi titik pemancar pada  $ED^k(T)$ , untuk  $k \geq 1$ . Jika titik  $u$  bukan titik pemancar di sub turnamen  $A$  maka titik tersebut memenuhi asumsi pada teorema 7 di [4], jika  $(u,v)$  busur di  $A$  maka  $(u,v) \notin ED(T)$  untuk

setiap titik lain  $v$  di sub turnamen  $A$  dan jika  $(u,v)$  bukan busur di  $A$  maka  $(u,v) \in ED(T)$ . Jadi sub turnamen  $A$  menjadi kekalahan turnamen transitif ditambah dengan satu titik yang menjadi pemancar sekaligus penerima  $\tilde{T}_r^*$ . Sedangkan kondisi sub turnamen  $B$  di  $T$  sama dengan kondisi sub turnamen  $A$  di  $T$  yang ada pada teorema 4, sehingga sub turnamen  $B$  menjadi digraf null di  $ED(T)$  dengan orde  $|V(B)|$  dan arah mengalahkan dari sub turnamen  $B$  ke sub turnamen  $A$ .

Dengan cara yang sama dengan paragraph di atas, jika dibuat digraf eksentris sub turnamen  $A$  di  $ED(T)$  maka akan diperoleh kekalahan dari kekalahan turnamen transitif atau turnamen transitif  $T_r$  dan setiap titik  $u$  di sub turnamen  $A$  akan mengalahkan setiap titik di sub turnamen  $B$  di  $ED^2(T)$ . Sedangkan sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$  juga memenuhi kondisi sub turnamen  $B$  di  $ED(T)$  pada teorema 4, sehingga sub turnamen  $B$  menjadi digraf lengkap di  $ED^2(T)$ .

Dengan cara pembuktian yang sama dengan paragraph di atas, diperoleh sub turnamen  $A$  di  $ED^2(T)$  akan menjadi  $\tilde{T}_r^*$  dan sub turnamen  $B$  menjadi digraf null di  $ED(T)$  dengan orde  $|V(B)|$  di  $ED^3(T)$ . Arah mengalahkan adalah dari sub turnamen  $B$  ke sub turnamen  $A$ . Jadi struktur digraf eksentris  $ED^3(T)$  sama persis dengan digraf eksentris  $ED(T)$ . Jadi  $t(T) = 1$  dan  $p(T) = 2$ . ●

Berikut ini rangkaian gambar dari digraf eksentris iterasi ke-0, 1, 2, dan 3 dari turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen  $A$  adalah turnamen transitif orde 3 dan sub turnamen  $B$  adalah turnamen regular orde 3.



**Gambar 9** Digraf eksentris iterasi ke-0, 1, 2, dan 3 dari turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen  $A$  dan  $B$  masing-masing transitif orde 3 dan regular orde 3

### Teorema 6

Jika sub turnamen  $A$  dan  $B$  pada turnamen tereduksi  $T$  berbentuk turnamen transitif maka  $t(T) = 1$  dan  $p(T) = 2$

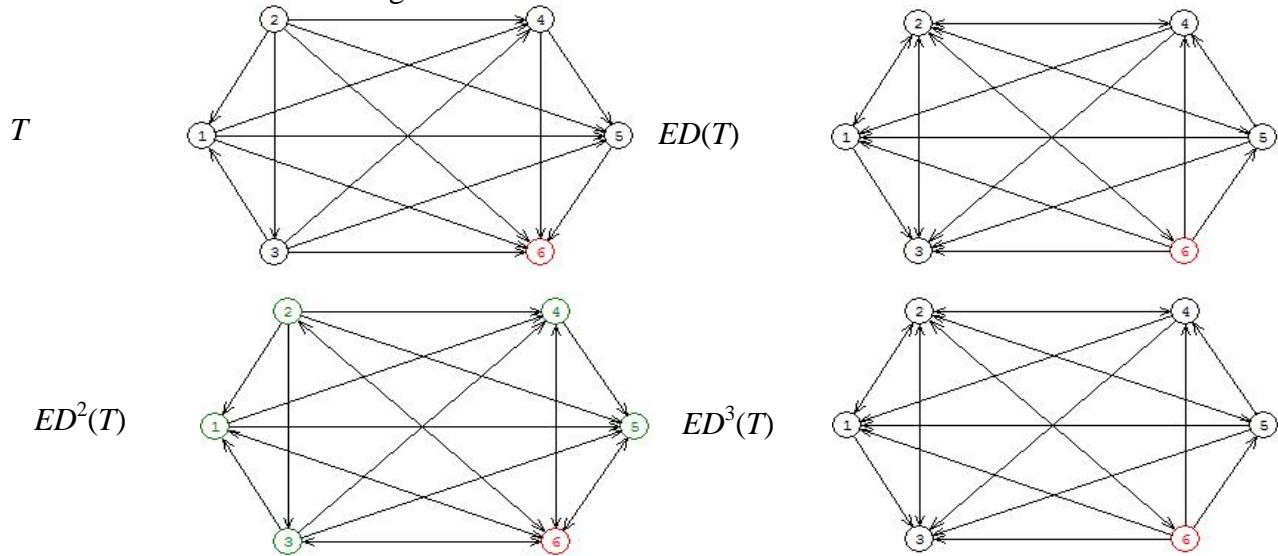
**Bukti:**

Kondisi sub turnamen  $A$  di  $T$  pada teorema ini sama dengan kondisi sub turnamen  $A$  di  $T$  pada teorema 5 sebelumnya, sedangkan kondisi sub turnamen  $B$  di  $T$  pada teorema ini sama dengan kondisi sub turnamen  $B$  di  $T$  pada teorema 4 sebelumnya. Sehingga dengan melakukan cara pembuktian yang sama dengan yang dilakukan masing-masing sub turnamen  $A$  dan  $B$  pada teorema 5 dan 4 di atas diperoleh hasil:

1. pada  $ED(T)$ , sub turnamen  $A$  menjadi  $\tilde{T}_r^*$ , sub turnamen  $B$  menjadi  $\tilde{T}_r$ , dengan arah mengalahkan adalah dari sub turnamen  $B$  ke sub turnamen  $A$
2. pada  $ED^2(T)$ , sub turnamen  $A$  menjadi  $T_r$ , sub turnamen  $B$  menjadi  $T_r^*$ , dengan arah mengalahkan dari sub turnamen  $A$  ke sub turnamen  $B$ .
3. pada  $ED^3(T)$ , sub turnamen  $A$  menjadi  $\tilde{T}_r^*$ , sub turnamen  $B$  menjadi  $\tilde{T}_r$ , dengan arah mengalahkan adalah dari sub turnamen  $B$  ke sub turnamen  $A$ .

Sehingga diperoleh struktur digraf eksentris  $ED^3(T)$  sama dengan  $ED(T)$ . Jadi  $t(T) = 1$  dan  $p(T) = 2$ . ●

Berikut ini rangkaian gambar dari digraf eksentris iterasi ke-0, 1, 2, dan 3 dari turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen  $A$  dan  $B$  adalah turnamen transitif orde 3.



**Gambar 11** Digraf eksentris iterasi ke-0, 1, 2, dan 3 dari turnamen tereduksi  $T$  dengan sub turnamen  $A$  dan  $B$  adalah turnamen transitif orde 3

## Simpulan dan saran

### Simpulan

1. Dari teorema 1 dan 2 diperoleh bahwa arah mengalahkan turnamen tereduksi  $T$  dari sub turnamen  $A$  ke  $B$  berubah arah menjadi dari sub turnamen  $B$  ke  $A$ . Lebih jauh dari teorema 3 sampai dengan 6 diperoleh bahwa arah mengalahkan pada setiap iterasi digraf eksentris terjadi selang-seling dari sub turnamen  $A$  ke  $B$  dan sebaliknya.
2. Dari teorema 3 sampai dengan 6 diperoleh bahwa jika sub turnamen  $A$  dan  $B$  pada turnamen tereduksi diganti dengan turnamen regular atau transitif maka selalu didapatkan perioda iterasi digraf transitif  $p(T) = 2$ . Kesimpulan ini berarti semakin memperkuat konjektur 1 di atas.

### Saran

1. Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan meneliti sifat-sifat digraf eksentris dari kelas turnamen yang lain.
2. Khusus untuk penelitian sifat digraph eksentris dari turnamen tereduksi, penelitian dapat dilanjutkan dengan mengganti sub turnamen  $A$  dan  $B$  dengan kelas turnamen selain dari turnamen regular atau transitif.

## Daftar Pustaka

- [1] Boland, J., dan Miller, M., 2001, The eccentric digraph of a digraph, Proceeding of AWOCA '01, Lembang-Bandung, Indonesia, pp. 66-70
- [2] Buckley, F., The eccentric digraph of a graph, Congressus Numerantium 149, 2001, pp. 65-69
- [3] Chartrand, G. dan Lesniak, L., Graphs and Digraphs, 3<sup>rd</sup> edition, Chapman & Hill, London, 1996, pp. 138
- [4] Iswadi, H., Digraf eksentris dari turnamen transitif dan regular, Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, vol. 8, no. 2. 2003a, pp. 1-11
- [5] Iswadi, H., Digraf eksentris dari turnamen kuat, Jurnal Matematika Aplikasi dan Pembelajarannya, vol. 2, no. 1, Juni 2003, 2003b, pp. 158-162
- [6] Iswadi, H., Herlambang, A., dan Arwoko, H., Masalah dan algoritma digraf eksentris dari digraf, Unitas: Bulletin ilmiah Universitas Surabaya, vol.11, no. 2, 2003c, pp. 3-16
- [7] Iswadi, H., Herlambang, A., dan Arwoko, H., Digraf dengan perioda 2, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Statistika VI di ITS 11 Oktober 2003, 2003, pp. 435-440
- [8] Landau, H. G., On dominance relations and the structure of animal societies III: the conditions for a score structure, Bull. Math. Biophys. 15, 1953, pp. 143-148.
- [9] Jimenez, G., Domination graphs of near-regular tournaments and the domination-compliance graph, Disertasi, University of Colorado at Denver, Denver, 1998, pp. 7-9
- [10] Miller, M., Gimbert, J., Ruskey, F., and Ryan, J., Iterations of eccentric digraphs, Proceeding of AWOCA '02, Fraser Island, Australia, 2002