DIMENSI METRIK GRAF BLOK BEBAS ANTING

Hazrul Iswadi

Departemen MIPA dan Jurusan Teknik Industri
Fakultas Teknik, Universitas Surabaya
Jalan Raya Kalirungkut, 60293, Surabaya
Jawa Timur, Indonesia

Abstrak. Misalkan $G = (V(G),E(G))$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan garis $E(G)$. *Representasi* dari v terhadap himpunan titik $W = \{w_1, w_2, \cdots; w_k\} \subseteq V(G)$ adalah k-tuple $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \cdots, d(v,w_k))$. Himpunan W disebut *himpunan resolving* dari G jika setiap titik mempunyai representasi yang berbeda terhadap W. Titik potong v di G adalah titik di G dengan sifat jika titik v dihapus maka banyaknya komponen $G - v$ akan lebih besar dari banyaknya komponen G. Sebuah *blok* dari suatu graf adalah subgraf maksimal tanpa titik potong. Graf G disebut *graf blok* jika dan hanya jika setiap blok dari graf G adalah graf lengkap. Blok dari graf blok yang diperoleh dengan hanya menghapus satu titik potong dari graf blok disebut dengan *blok ujung*. Blok ujung yang hanya satu titik disebut dengan anting. Pada makalah ini akan dibahas beberapa sifat himpunan resolving dan nilai dimensi metrik dari graf blok yang tidak memiliki anting.

Kata Kunci: *representasi, himpunan resolving, titik potong, blok, graf blok, graf blok bebas anting.*

PENDAHULUAN

Misalkan $G = (V(G),E(G))$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan garis $E(G)$. Simbol, istilah dan konsep-konsep dasar graf mengacu pada buku Graphs and Digraphs karya Chartrand dkk. [2]. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \cdots; w_k\} \subseteq V(G)$ adalah himpunan titik terurut. k-tuple $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \cdots, d(v,w_k))$ didefinisikan sebagai *representasi dari v terhadap W*. Himpunan W disebut *himpunan resolving* dari G jika setiap titik mempunyai representasi yang berbeda terhadap W. Himpunan resolving G yang memuat jumlah titik minimal disebut *himpunan resolving minimum* atau *basis* dari G. *Dimensi metrik* dari graf G, dinotasikan dengan $\dim(G)$, adalah jumlah titik dalam basis G. Titik v di basis B dari G disebut dengan *titik basis* dari G.

Konsep tentang *himpunan pembeda minimum* pada graf diperkenalkan secara terpisah oleh Slater [14], dan Harary dan Melter [4], dengan menggunakan peristilahan yang berbeda. Beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan berkaitan dengan sifat himpunan resolving dan nilai dimensi metrik seperti pada graf lintasan, pohon, lengkap, dan lingkaran dapat dilihat pada daftar pustaka [1], [4], [14]. Kemudian aplikasi dan konteks masalah riil dari dimensi metrik suatu graf dapat dilihat di [5], [6], [10], [11], dan [12].

Graf G disebut sebagai *graf berdimensi-k* jika $\dim(G) = k$ (Chartrand dan Zhang [3]). Misalkan G adalah graf berdimensi-k dengan $k \geq 1$. Graf G adalah *graf berdimensi-k secara acak* jika setiap k buah titik secara acak di graf G maka himpunan yang dibentuk oleh k buah titik tersebut membentuk sebuah basis di G. Chartrand dan Zhang [3] telah membuktikan bahwa graf lengkap K_{k+1} adalah graf berdimensi-k secara acak untuk setiap $k \geq 1$ dan graf lingkaran C_n dengan n bilangan ganjil ≥ 3 adalah graf berdimensi-2 secara acak.

Sebuah titik v dari graf G disebut titik potong G jika v dihapus dari G akan mengakibatkan banyaknya komponen G - v ($k(G$ - $v)$) lebih dari banyaknya komponen G ($k(G)$). Blok dari sebuah graf adalah subgraf maksimal tanpa titik-potong. Graf G disebut *graf blok* jika dan hanya jika setiap blok dari graf G adalah graf lengkap. *Komponen lengkap* K_n dari graf blok adalah subgraf lengkap yang dinduksi dari gabungan semua titik dari blok dan semua titik potong yang membentuk blok tersebut. Titik-titik yang berada dalam suatu blok di graf blok G disebut dengan *titik ekstrim*. Jadi setiap titik dalam graf blok adalah salah satu dari sebagai titik potong atau sebagai titik ekstrim.

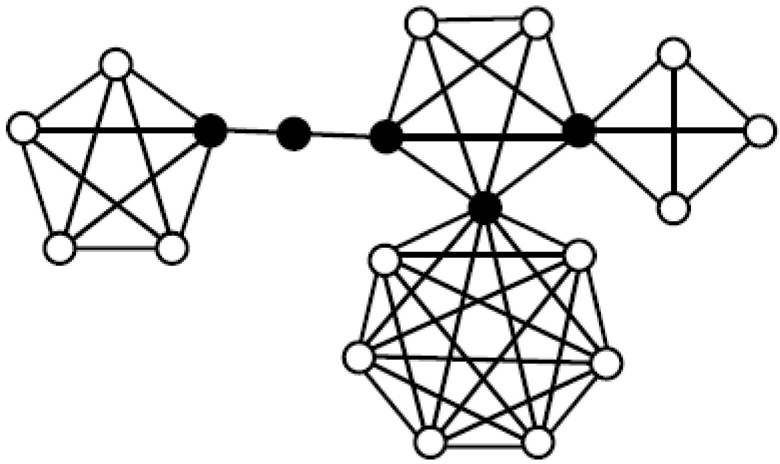
Pendefinisian yang serupa terjadi untuk graf kaktus. *Graf kaktus G* adalah sebuah graf dengan sifat untuk setiap blok berlaku gabungan semua titik blok dan semua titik kritisnya menginduksi sebuah subgraf lingkaran. Graf blok dan graf kaktus adalah kelas-kelas graf yang didefinisikan oleh Zverovich [16]. Definisi dari Zverovich adalah definisi yang lebih umum dari graf amalgamasi lingkaran ([7],[8]), dan graf kaktus C_m^n [13]. Wang dan Wang [15] memadukan definisi graf blok dan graf kaktus menjadi graf blok kaktus. Mereka mendefinisikan *graf blok kaktus* sebagai graf dengan sifat untuk setiap blok berlaku gabungan semua titik blok dan semua titik kritisnya menginduksi sebuah subgraf lengkap atau subgraf lingkaran.

Iswadi [9] telah meneliti sifat himpunan resolving dari graf kaktus. Pada makalah ini akan diteliti sifat himpunan resolving himpunan resolving dari graf blok. Pengetahuan atas sifat himpunan resolving dari kedua kelas graf ini diharapkan membuka peluang untuk menentukan sifat himpunan resolving dan nilai dimensi metrik dari graf blok kaktus.

DIMENSI METRIK GRAF BLOK BEBAS ANTING

Blok dari graf blok yang diperoleh dengan hanya menghapus satu titik potong dari graf blok disebut dengan *blok ujung*. Sedangkan blok dari graf blok yang diperoleh dengan menghapus lebih dari satu titik potong dari graf blok disebut dengan *blok internal*. Blok ujung yang hanya satu titik disebut dengan anting. Untuk menyederhanakan persoalan maka graf blok yang akan diteliti adalah graf tanpa titik anting atau disebut juga dengan *graf blok bebas anting*.

Gambar 1 berikut ini adalah contoh dari graf blok bebas anting *G* dengan orde 21, 4 buah komponen lengkap yang terdiri dari 1 bauh graf lengkap K_4, 2 buah graf lengkap K_5, dan 1 buah K_7. Graf *G* ini memiliki 5 buah titik potong yang ditandai oleh titik-titik yang berwarna hitam.



Gambar 1. Graf blok bebas anting dengan 21 titik.

Lema-lema berikut ini dapat digunakan untuk memprediksi batas bawah dari dimensi metrik dari graf blok *G*.

Lema 1 Sekurang-kurangnya $n - (c + 1)$ titik dari setiap komponen lengkap K_n dari graf blok bebas anting *G* harus menjadi anggota himpunan resolving *W* dari *G*, dimana $n \geq 3$ adalah *n* adalah orde dari K_n dan *c* adalah banyaknya titik potong dari komponen lengkap K_n.

Bukti: Misalkan W adalah himpunan resolving dari graf blok bebas anting *G*. Misalkan terdapat sebanyak c titik potong yang berada di komponen lengkap K_n dari graf G. Sehingga terdapat sebanyak $n - c$ titik ekstrim berada di K_n. Bukti dari Lema 1 ini akan dilakukan dengan cara kontradiksi. Andaikan terdapat suatu K_n sehingga $|W \cap K_n| < n - c - 1$. Berarti terdapat sekurang-kurangnya 2 titik ekstrim u dan v di K_n sehingga $u, v \notin W$. Karena u dan v berada di K_n maka u dan v berjarak sama, yaitu berjarak 1, ke setiap titik potong x dan titik ekstrim lain $w \in W \cap K_n$. Kemudian u dan v juga berjarak sama ke setiap titik $z \in W \cap (G - K_n)$. Jadi u dan v berjarak sama ke setiap titik yang berada pada himpunan resolving W. Hal ini bertentangan dengan sifat himpunan resolving W yang harus membedakan setiap dua titik di graf G. ■

Lema 1 dapat dinyatakan secara ekivalen dengan memperhatikan banyaknya titik yang tidak berada dalam himpunan resolving W. Pernyataan alternatif untuk Lema 1 dapat dituliskan pada Lema 2 berikut ini. Lema 2 dituliskan tanpa bukti.

Lema 2 Paling banyak satu titik dari setiap komponen lengkap K_n dari graf blok bebas anting *G* tidak menjadi anggota himpunan resolving *W* dari *G*, dimana $n \geq 3$ adalah *n* adalah orde dari K_n.

Jika $c \leq n - 1$ maka terdapat sekurang-kurangnya *n* – (*c* + 1) titik dari komponen lengkap K_n dari graf blok bebas anting *G* harus menjadi anggota himpunan resolving *W* dari *G*. Jika $c = n$ maka setiap titik dari komponen lengkap K_n dari graf blok bebas anting *G* tidak harus menjadi anggota himpunan resolving *W* dari *G*. Komponen lengkap K_n yang setiap titiknya adalah titik potong maka komponen tersebut disebut *komponen lengkap penuh titik potong*. Sedangkan komponen lengkap K_n yang lain disebut *komponen lengkap tidak penuh titik potong*.

Lema 1 atau Lema 2 dapat digunakan untuk membuktikan Teorema 1 berikut ini.

Teorema 1 Jika graf blok bebas anting *G* mempunyai *m* buah komponen lengkap tidak penuh titik potong K_{n_i}, dimana $i = 1, 2, \ldots, m$, $n_i \geq 3$ dan c_i adalah banyaknya titik potong dalam komponen lengkap tidak penuh titik potong K_{n_i} dengan $c_i \leq n_i - 1$ maka

$$dim(G) = \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m.$$

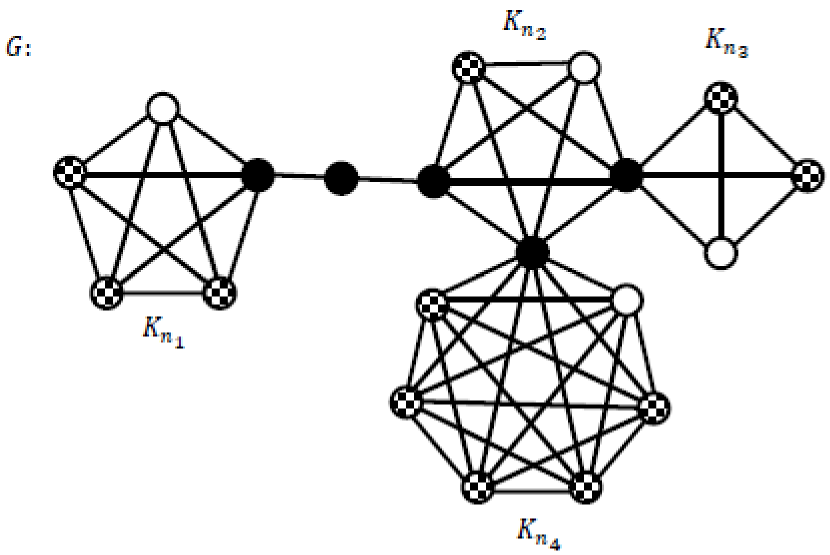
Bukti: Misalkan B adalah himpunan basis untuk graf blok bebas anting G. Akan ditunjukkan berlaku $|B| \geq \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m$. Dengan menggunakan Lema 1, untuk setiap himpunan resolving W di G dan untuk setiap komponen lengkap tidak penuh titik potong K_{n_i} di G berlaku $|W \cap K_{n_i}| \geq n_i - c_i - 1$. Sehingga

$$\begin{aligned} |B| &\geq \sum_{i=1}^{m}|W \cap K_{n_i}| \\ &\geq \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan $|B| \leq \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m$. Buat himpunan titik $W_i = \{w_i \in K_{n_i} | w_i \text{ adalah titik ekstrim}\}$ dengan $|W_i| = n_i - c_i - 1$. Pendefinisian W_i di atas mengakibatkan titik-titik di K_{n_i} dapat dikelompokkan menjadi 3 himpunan yaitu: W_i, C_i, dan $\{u\}$. Himpunan C_i adalah himpunan semua titik potong di K_{n_i} dengan $|C_i| = c_i$. Sedangkan u adalah titik ekstrim di K_{n_i} yang tidak berada di W_i. Untuk setiap pasangan titik potong c_i dan c_j di G, setiap komponen $G - c_i$ berbeda dengan setiap komponen $G - c_j$. Sehingga terdapat suatu titik ekstrim $w_k \in K_{n_k}$ dengan $d(c_i, w_k) \neq d(c_j, w_k)$. Untuk suatu titik potong c_i, selalu terdapat $w_l \in K_{n_l}$ dengan titik ekstrim e_i dan w_l berada pada komponen yang berbeda sehingga $d(e_i, w_k) > d(c_i, w_k)$. Jadi setiap titik $v \in C_i \cap \{u\}$ dapat dibedakan oleh himpunan $W = \sum_{i=i}^{m} W\_i$ dengan $|W| \leq \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m$. Jadi W adalah himpunan resolving di graf G. Dari sifat basis B, diperoleh $|B| \leq \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m$.

Dengan menggunakan dua pertidaksamaan $|B| \geq \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m$ dan $|B| \leq \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m$, dapat disimpulkan bahwa $\dim(G) = |B| = \sum_{i=1}^{m}(n_i - c_i) - m$. ■

Dengan menggunakan graf pada Gambar 1, pada Gambar 2 berikut ini diberikan contoh graf *G* dengan titik-titik potong dan titik-titik basis yang dimilikinya. Titik-titik potong ditandai oleh titik-titik yang berwarna hitam, sedangkan titik-titik basisnya ditandai oleh titik-titik yang bercorak papan catur. Nilai-nilai parameter dari graf G di atas adalah $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $n_3 = 4$, $n_4 = 7$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, dan $m = 4$. Dimensi metrik graf *G* ini adalah $\dim(G) = (5 - 1) + (5 - 3) + (4 - 1) + (7 - 1) - 4 = 11$.



Gambar 2. Graf blok bebas anting dengan titik-titik basisnya, titik-titik potongnya.

Teorema 1 dapat digunakan untuk menghitung nilai dimensi metrik dari amalgamasi titik G dari graf lengkap $\{K_{n_i}\}$ seperti yang terdapat pada Akibat 1 berikut. Untuk graf amalgamasi titik dari graf lengkap *G* di atas $c_i = 1$.

Akibat 1 Jika *G* adalah graf amalgamasi titik dari *m* buah graf lengkap K_{n_i} ($i = 1,2,\dots,m$ dan $n_i \geq 3$) maka

$$dim(G) = \sum_{i=1}^{m} n_i - 2m.$$

KESIMPULAN

Dari uraian dan pembuktian pada bagian atas, dapat disimpulkan beberapa hal:

1. Komponen yang mempengaruhi himpunan resolving dari graf blok bebas anting adalah komponen lengkap tidak penuh titik potong.
2. Nilai dimensi metrik dari graf blok bebas anting *G* berasal dari orde dan banyaknya titik potong dari dalam komponen lengkap tidak penuh titik potong.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A., dan Oellermann, O.R., 2000, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.*, 105, 99 – 113.

[2] Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P., 2011, *Graphs and Digraphs*, Edisi 5, CRC Press, Boca Raton.

[3] Chartrand, G. dan Zhang, P., 2003, The Theory and Appllications of Resolvability in Graphs: A Survey, *Congr. Numer.* 160, 47 – 68.

[4] Harary, F. dan Melter, R., 1976, On the Metric Dimension of a Graph, *Ars Combin.* 2, 191 – 195.

[5] Hulme, B., Shiver, A. dan Slater, P., 1981, Fire: A Subroutine for Fire Protection Network Analysis, *Sandia National Laboratories, New Mexico* SAND 81–1261.

[6] Hulme, B., Shiver, A. dan Slater, P., 1982, Computing Minimum Cost Fire Protection, *Sandia National Laboratories, New Mexico* SAND 82–0809.

[7] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., dan Salman, A.N.M., 2010, Metric Dimension of Amalgamation of Cycles, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 41:1, 19 – 31.

[8] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Salman A.N.M., dan Simanjuntak, R., 2010, The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles, Utilitas Mathematica, *Util. Math.*, 83, 121-132.

[9] Iswadi, H., 2012, Himpunan Resoving dari Blok Lingkaran dari Graf Kaktus, *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi I UNTAD*, 3-5 Desember 2012, Palu.

[10] Johnson, M., 1993, Structure-Activity Maps for Visualizing the Graph Variables Arising in Drug Design, *J. Biopharm. Statist.* 3, 203 – 236.

[11] Johnson, M., 1998, Browsable Structure-Activity Datasets, *Advances in molecular similarity (R. Carbo-Dorca and P. Mezey, eds.)* 153 – 170.

[12] Khuller, S., Raghavachari, B. dan Rosenfeld, A., 1994, Localization in Graphs, *Technical Report*.

[13] Maryono, I., Salman, A.M.N., dan Iswadi, H., 2009, Dimensi metrik dari graf kaktus C^n_m, *Proceeding of Mathematics and Mathematics Education National Seminar in Surabaya State Univesity*, *Indonesia,* June 20, Surabaya.
[14] Slater, P., 1975, Leaves of Trees, *Congr. Numer.* 14, 549 – 559.
[15] Wang, F.H., dan Wang, Y.L., The lower and upper forcing geodetic number of block-cactus graphs, preprint.
[16] Zverovich, V.E., 1998, The ratio of the irredundance number and the domination number for block-cactus graphs, *J. Graph Theory*, 29:1, 139-149.