GRAF SPLIT $K_{2n/n}$ TIDAK SISI-AJAIB UNTUK $n \equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$ DAN TIDAK SISI-AJAIB SECARA KUAT UNTUK SETIAP N > 3

HAZRUL ISWADI

Departemen Matematika dan IPA (MIPA)
Universitas Surabaya (UBAYA)
Jalan Raya Kalirungkut Surabaya 60292
e-mail: us6179@wolf.ubaya.ac.id

Abstrak.
Pelabelan total sisi-ajaib pada suatu graf G adalah pemetaan satu-satu $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, ..., v+e\}$, dimana $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$, dengan sifat untuk setiap sisi xy di G, $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, untuk suatu konstanta k. Bilangan k disebut bilangan ajaib G. Suatu graf G dengan sebuah pelabelan total sisi-ajaib disebut sisi-ajaib. Pelabelan total sisi-ajaib disebut kuat jika label dari titik adalah label paling kecil yang mungkin yaitu 1, 2, ... , v. Graf G disebut sisi-ajaib secara kuat jika mempunyai suatu pelabelan total sisi-ajaib kuat. Graf split $K_{2n/n}$ adalah graf yang memiliki jumlah titik v = 2n, n buah titik membentuk graf lengkap Kn dan n buah titik yang lain masing-masingnya terhubung ke semua titik di graf lengkap Kn. Pada tulisan ini dibuktikan bahwa graf split $K_{2n/n}$ tidak sisi-ajaib untuk $n \equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$ dan tidak sisi-ajaib secara kuat untuk setiap n > 3.

Kata kunci: graf split, pelabelan total sisi-ajaib

1. Pendahuluan

Graf G adalah himpunan berhingga tak kosong dari *titik* $V(G)$ bersama dengan himpunan pasangan tak berurut dari dua titik yang berbeda di G yang dinamakan dengan *sisi* dan dinotasikan dengan $E(G)$. Kardinalitas dari himpunan titik $|V(G)|$ di G dinotasikan dengan v dan disebut dengan *orde* G, sedangkan *kardinalitas* dari himpunan sisi $|E(G)|$ dinotasikan dengan e dan disebut dengan *ukuran* G. Sisi $xy = \{x,y\}$ disebut *menghubungkan* titik x dan y. Jika xy suatu sisi di G maka x dan y disebut sebagai titik-titik yang *bertetangga*. *Derajat* $d(x)$ dari suatu titik x di G adalah himpunan dari semua titik lain y di G sehingga y adalah tetangga x di G.

Beberapa definisi berikut diambilkan dari Chartrand dan Lesniak (1996). *Graf lengkap* K_n dengan n buah titik adalah graf dengan setiap dua titik selalu bertetangga. *Komplemen* $\overline{G}$ dari graf G adalah graf dengan himpunan titik yang sama dengan G sehingga dua titik bertetangga di $\overline{G}$ jika dan hanya jika titik-titik tersebut tidak bertetangga di G. *Graf Null* $\overline{K}_n$ adalah komplemen dari graf lengkap K_n. *Graf bipartit* $K_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan mempartisi himpunan $V(G)$ menjadi himpuan V_1 dan V_2 sehingga setiap sisi di $E(G)$ menghubungkan titik di V_1 dengan V_2.

Dari Wallis (2001) diperoleh definisi-definisi berikut. *Pelabelan total sisi-ajaib* pada suatu graf G adalah pemetaan satu-satu $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, ..., v+e\}$, dimana $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$, dengan sifat diberikan sisi xy di G, $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, untuk suatu konstanta k. Bilangan k disebut *bilangan ajaib* G. Suatu graf G dengan sebuah pelabelan total sisi-ajaib disebut *sisi-ajaib*. Pelabelan total sisi-ajaib disebut *kuat* jika label dari titik adalah label paling kecil yang mungkin yaitu 1, 2, ... , v. Sebuah graf disebut *sisi-ajaib secara kuat* jika mempunyai suatu pelabelan total sisi-ajaib kuat.

Misalkan λ pelabelan total sisi-ajaib graf G dengan jumlah ajaib k, dengan himpunan label untuk titik-titik di G adalah $\{a_1, a_2, ..., a_v\}$. Kondisi perlu yang harus dipenuhi adalah:

1. $a_i + a_j + a_h = k$ tidak mungkin terjadi jika ada dua a_i, a_j, dan a_h bertetangga di G.
2. jumlah $a_i + a_j$, dimana $x_i x_j$ sisi di G, semuanya berbeda.
3. $0 < k - (a_i + a_j) \leq v + e$, dimana $x_i x_j$ sisi di G.

Didefinisikan jumlahan bilangan bulat sebagai berikut

$$\sigma_i^j = (i+1)+(i+2)+...+j = i(j-i)+\binom{j-i+1}{2} \quad (1)$$

Dengan menggunakan persamaan (1), jumlah dari bilangan k dikali dengan banyaknya sisi e adalah

$$ke = \sigma_0^{v+e} + \sum[d(x_i)-1]a_i. \quad (2)$$

Dari persamaan (2) dapat dibuktikan teorema penting berikut ini.

Teorema 1 (Ringel dan Llado (1996))

Jika G mempunyai jumlah garis e genap, setiap titik x di G memiliki derajat $d(x)$ ganjil, dan jumlahan $v + e \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$ maka graf G tidak memiliki pelabelan total sisi-ajaib

Kotzig dan Rosa (1970) (seperti yang tertera dalam Gallian (2001)) telah membuktikan bahwa graf bipartit $K_{m,n}$ mempunyai pelabelan total sisi-ajaib untuk setiap m dan n. Kemudian dari Wallis (2001) disebutkan bahwa graf lengkap K_n mempunyai pelabelan total sisi-ajaib jika dan hanya jika n = 1, 2, 3, 5, atau 6. Pertanyaan tentang pelabelan total sisi-ajaib suatu graf G kemudian ditujukan pada graf-graf G yang memuat graf lengkap K_n seperti graf split $K_{m+n}/_{m}$ dibawah ini.

Graf split $K_{m+n}/_{m}$ merupakan suatu graf yang memuat graf lengkap K_n, graf Null $\overline{K}_m$, dan graf bipartit $K_{m,n}$ yang menghubungkan dua himpunan titik di graf lengkap dengan graf Null. Jumlah titik $K_{m+n}/_{m}$ adalah $v = m + n$, jumlah sisi $e = mn+\binom{n}{2} = \frac{n}{2}(2m+n-1)$, dan $v + e = m+n+mn+\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(2m+n)(n+1)$. Untuk $m = n$, Graf split $K_{2n}/_{n}$ memiliki jumlah titik $v = 2n$, jumlah sisi $e = n^2+\binom{n}{2} = \frac{n}{2}(3n-1)$, dan $v + e = 2n+n^2+\binom{n}{2} = \frac{3n}{2}(n+1)$.

Dalam hasil dibawah ini akan ditunjukkan bahwa graf split $K_{2n}/_{n}$ tidak sisi-ajaib untuk $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$ dan tidak sisi-ajaib secara kuat untuk setiap $n > 3$.

2. Hasil-hasil

Teorema 1 tidak dapat dipakai pada graf split $K_{2n}/_{n}$ dengan n genap karena pada graf split $K_{2n}/_{n}$ dengan n genap akan diperoleh setiap titik x pada bagian graf Null $\overline{K}_n$ mempunyai derajat $d(x)$ genap. Teorema 1 juga tidak dapat dipakai pada graf split $K_{2n}/_{n}$ dengan $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 8)$, $n \equiv 5(\mathrm{mod}\ 8)$, dan $n \equiv 7(\mathrm{mod}\ 8)$. Untuk graf split $K_{2n}/_{n}$ dengan $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 8)$ dan $n \equiv 5(\mathrm{mod}\ 8)$ maka jumlah sisi $e = \frac{n}{2}(3n-1)$ akan bernilai ganjil. Kemudian untuk $n \equiv 7(\mathrm{mod}\ 8)$ maka jumlah $v + e \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$. Sedangkan untuk $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$ diperoleh teorema 2 di bawah ini.

Teorema 2

Graf split $K_{2n}/_{n}$ tidak mempunyai pelabelan total sisi-ajaib jika $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$

Jawab: Misalkan suatu graf split $K_{2n}/_{n}$ dengan $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$. Maka diperoleh $v \equiv 6(\mathrm{mod}\ 8)$ dan $e \equiv \frac{1}{2}[3(\mathrm{mod}\ 8)][3(3(\mathrm{mod}\ 8)-1]$. Karena 3(mod 8) merupakan bilangan ganjil maka diperoleh e bernilai genap. Sedangkan derajat dari setiap titik x di $K_{2n}/_{n}$ adalah

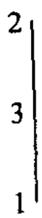
$$d(x) = \begin{cases} 2n-1, & \text{jika } x \text{ titik di graf lengkap } K_n \\ n, & \text{jika } x \text{ titik di graf Null } \overline{K}_n \end{cases}$$

dengan n ganjil. Kemudian $v + e \equiv \frac{3}{2}[3(\bmod 8)][3(\bmod 8)+1]$

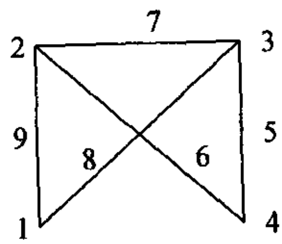
$$\equiv \frac{3}{2}[3(\bmod 8)][4(\bmod 8)]$$
$$\equiv [1(\bmod 8)][2(\bmod 4)]$$
$$\equiv 2(\bmod 4)$$

Dengan menggunakan teorema 1, graf split $K_{2n/n}$ dengan $n \equiv 3(\bmod 8)$ tidak mempunyai pelabelan total sisi-ajaib.□

Berikut ini akan diperlihatkan pelabelan total sisi-ajaib kuat untuk $n = 1$ dan 2. Untuk $n = 1$, diperoleh graf split dengan $v = 2$ dan $e = 1$. Jadi terdapat pelabelan total sisi-ajaib kuat dengan titik diberi label 1 dan 2 dan sisi diberi label 3 sehingga $k = 6$. Sedangkan untuk $n = 2$, diperoleh graf split dengan $v = 2$ dan $e = 5$. Pelabelan total sisi-ajaib kuat dapat dibuat dengan memberi label titik-titik dengan 1, 2, 3, 4, label sisi-sisi dengan 4, 5, ... , 9, dan bilangan ajaib $k = 12$, seperti yang terlihat pada gambar 1 di bawah ini.



a. graf split $K_{2n/n}$, dengan $n = 1$



b. graf split $K_{2n/n}$, dengan $n = 2$

Gambar 1 Pelabelan total sisi-ajaib kuat untuk graf split $K_{2n/n}$, dengan $n = 1$ dan 2

Dari teorema 2 di atas diketahui bahwa graf split $K_{2n/n}$, dengan $n = 3$ tidak sisi-ajaib. Berikut ini pada teorema 3 akan ditunjukkan bahwa graf split $K_{2n/n}$, dengan $n > 3$ tidak sisi-ajaib secara kuat.

Misalkan graf split $K_{2n/n}$, dengan $n > 3$, mempunyai himpunan n buah titik $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ yang berasal dari bagian graf lengkap K_n dan himpunan n buah titik $\{x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n}\}$ yang berasal dari bagian graf Null $\overline{K}_n$. Misalkan λ pelabelan total sisi-ajaib secara kuat dari $K_{2n/n}$ dan berlaku untuk setiap sisi $x_r x_s$ di $K_{2n/n}$

$$\lambda(x_r) + \lambda(x_r x_s) + \lambda(x_s) = k,$$

dimana k suatu bilangan bulat positif dan $\lambda(x_r) = a_r$, dimana a_r dan $r \in \{1,2, ... ,2n\}$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan juga $a_1 < a_2 < ... < a_n$ dan $a_{n+1} < a_{n+2} < ... < a_{2n}$.

Teorema 3

Graf split $K_{2n/n}$ tidak mempunyai pelabelan total sisi-ajaib kuat untuk $n > 3$

Jawab: Misalkan $a_k, a_l \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ dengan $a_k < a_l$ dan $a_i, a_j \in \{a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n}\}$ dengan $a_i < a_j$. Andaikan $a_j = a_i + 1$ maka haruslah $a_l \geq a_k + 2$. Karena kalau $a_l = a_k + 1$ maka

$$a_l + a_i = a_k + 1 + a_i = a_k + a_j.$$

Padahal $x_l x_i$ dan $x_k x_j$ sisi-sisi di $K_{2n/n}$. Bertentangan dengan λ pelabelan total sisi-ajaib dari $K_{2n/n}$. Untuk $a_l > a_k + 2$ maka sekurang-kurangnya $a_l = a_k + 3$. Kemudian akan diperoleh

$$a_n = a_{n-1} + 3 = a_{n-2} + 6 = ... = a_1 + 3(n-1) = a_1 + n - 3 + 2n > a_1 + 2n.$$

Sehingga diperoleh $a_n > 2n$. Bertentangan dengan λ pelabelan total sisi-ajaib secara kuat. Sedangkan untuk $a_l = a_k + 2$ maka himpunan $\{ a_1, a_2, ..., a_n \}$ berupa himpunan dengan n buah bilangan genap atau ganjil saja. Padahal a_i dan a_j adalah dua bilangan yang berurutan di himpunan $\{ a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n} \}$ sehingga tidak terdapat n buah bilangan ganjil atau genap saja pada himpunan $\{ a_1, a_2, ..., a_n \}$. Kemudian andaikan $a_j \geq a_i + 2$. Untuk $a_j > a_i + 2$, dengan cara yang sama dengan diatas akan diperoleh $a_{2n} > 2n$. Bertentangan lagi dengan λ pelabelan total sisi-ajaib secara kuat. Jadi satu-satunya kemungkinan yang tertinggal adalah $a_j = a_i + 2$. Andaikan $a_j = a_i + 2$ maka himpunan $\{ a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n} \}$ berupa himpunan dengan n buah bilangan genap atau ganjil saja. Jika himpunan $\{ a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n} \}$ adalah himpunan n buah bilangan genap maka himpunan $\{ a_1, a_2, ..., a_n \}$ adalah himpunan n buah bilangan ganjil. Sehingga $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$, $a_{n+1} = 2$, dan $a_{2n} = 2n$. Kemudian diperoleh

$$\lambda(x_n x_{n+1}) = k - (a_n + a_{n+1}) = k - (2n+1) = k - (a_1 + a_{2n}) = \lambda(x_1 x_{2n}).$$

Padahal $x_n x_{n+1}$ dan $x_1 x_{2n}$ sisi-sisi di $K_{2n/n}$. Berarti bertentangan dengan λ pelabelan total sisi-ajaib. Dengan cara yang sama untuk himpunan $\{ a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n} \}$ adalah himpunan n buah bilangan ganjil akan diperoleh juga

$$\lambda(x_n x_{n+1}) = k - (a_n + a_{n+1}) = k - (2n+1) = k - (a_1 + a_{2n}) = \lambda(x_1 x_{2n}).$$

Sehingga diperoleh lagi kontradiksi dengan λ pelabelan total sisi-ajaib. Jadi tidak terdapat pelabelan total sisi-ajaib secara kuat dari graf split $K_{2n/n}$, untuk $n > 3$. □

Daftar Pustaka

G. Chartrand dan L. Lesniak (1996), *Graphs and Digraphs*, edisi ke-3, Chapman&Hall, London

J. A. Gallian (2001), *A dynamic survey of graph labeling*, Electronic Journal Combinatorics, Dynamic Survey #DS6

G. Ringel dan A. S. Llado (1996), *Another tree conjecture*, Bulletin Inst. Comninatorics Application 18, hal. 83-85

W. D. Wallis (2001), *Magic graphs*, Birkhauser, Basel