BATAS ATAS BILANGAN DOMINASI LOKASI METRIK DARI GRAF HASIL OPERASI KORONA

Hazrul Iswadi
Departemen MIPA Universitas Surabaya
Jalan Raya Kalirungkut
Gedung TG Lantai 6
Kampus Tenggilis Surabaya Indonesia 60292
hazrul_iswadi@ubaya.ac.id

Abstract

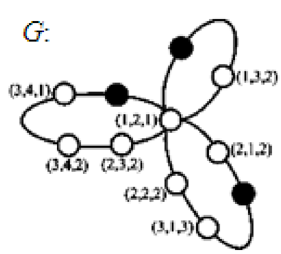
For an ordered set $W = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ of vertices and a vertex v in a connected graph G, the representation of v with respect to W is the ordered k-tuple $r(v\,|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), ..., d(v,w_k))$, where $d(x,y)$ represents the distance between the vertices x and y. The set W is called a locating set for G if every vertex of G has a distinct representation. A locating set containing a minimum number of vertices is called a basis for G. The metric dimension of G, denoted by dim(G), is the number of vertices in a basis of G. A set W of vertices of a connected graph G is a dominating set of G if every vertex in V – W is adjacent to a vertex of W. A dominating set W in a connected graph G is a metric-locating-dominating set, or an MLD-set, if W is both a dominating set and a locating set in G. The metric-location-domination number $\gamma_M(G)$ of G is the minimum cardinality of an MLD-set in G. A graph G corona H, $G \odot H$, is defined as a graph which formed by taking n copies of graphs $H_1, H_2, \ldots, H_n$ of H and connecting i-th vertex of G to every vertices of H_i. We determine the upper bound of the metric-location-domination number of corona product graphs in terms of the metric dimension of G or H.

Keywords: resolving set, dominating set, metric dimension, metric-location-domination number, corona .

1. Pendahuluan

Graf $G = G(V,E)$ didefinisikan sebagai suatu sistim matematika yang terdiri dari himpunan titik tak kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang menghubungkan dua titik tak terurut di $V(G)$. Banyaknya anggota pada himpunan titik $V(G)$ (kardinalitas), dinotasikan dengan $|V(G)|$, disebut dengan orde dari graf G. Graf G disebut graf sederhana jika setiap sisi pada graf G menghubungkan dua titik yang berbeda dan setiap dua titik yang berbeda di graf G hanya dihubungkan oleh satu sisi. Graf G dikatakan terhubung jika setiap dua titik u dan v di graf G selalu terdapat lintasan yaitu barisan selang-seling titik dan sisi yang menghubungkan u dengan v. Pada makalah ini, graf G yang ditinjau adalah graf sederhana dan terhubung.

Jarak antara dua titik u dan v $d_G(u,v)$ di suatu graf terhubung G adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G. Notasi jarak antara dua titik u dan v hanya di tulis $d(u,v)$ jika graf G yang disinggung sudah diketahui dari konteks. Misalkan $v \in V(G)$. Representasi dari v terhadap W di G adalah vektor dengan k unsur $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots , d(v,w_k))$ dengan komponennya adalah jarak dari v ke semua titik di W. Himpunan W disebut dengan himpunan pelokasian untuk G jika $r(u|W) = r(v|W)$ maka $u = v$ untuk semua u, v di G. Suatu himpunan pelokasian dengan kardinalitas minimum disebut dengan basis untuk G. Dimensi metric untuk G, dinotasikan dengan dim(G), adalah banyaknya titik-titik dalam sebuah basis untuk G. Untuk menentukan apakah W adalah sebuah himpunan pelokasian untuk G, kita hanya perlu memeriksa representasi dari titik-titik $V(G) - W$ karena representasi dari masing-masing w_i di W mempunyai bernilai '0' pada komponen ke-i; sehingga representasi dari w_i selalu tunggal. Jika $d(u,x) \neq d(v,x)$ maka kita katakan bahwa titik x membedakan titik u dan v atau titik-titik u dan v dibedakan oleh x. Dengan cara yang sama, jika $r(u|S) \neq r(v|S)$ maka kita katakan himpunan S membedakan titik-titik u dan v. Gambar 1 di bawah ini adalah ilustrasi dari graf G dengan himpunan pelokasiannya (titik yang berwarna hitam) dan representasi masing-masing titik yang tidak berada pada himpunan pelokasian terhadap suatu himpunan pelokasian W.



Gambar 1. Graf G dengan himpunan pelokasiannya. Representasi titik adalah untuk titik yang tidak berada pada himpunan pelokasian.

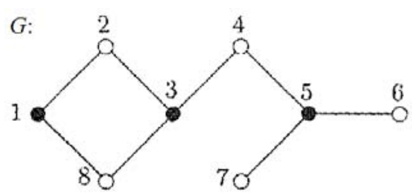
Konsep tentang dimensi metrik pada graf diperkenalkan pertama kali secara terpisah oleh Slater [Slater, 1975] dan Harary dkk [Harary dan Melter, 1976]. Mereka memperkenalkan ide tentang himpunan acuan (pembeda), basis, dan himpunan acuan (pembeda) minimal (dimensi metrik). Kemudian, konsep-konsep tersebut dipertajam dan diperoleh kaitan aplikasinya dalam bidang kimia pada tahun 2000 [Chartrand, Eroh, Johnson, dan Oellermann, 2000]. Sejak tahun 2000, kajian tentang himpunan pembeda dan nilai dimensi metrik suatu graf mendapatkan banyak perhatian dari ahli graf teori. Kemudian semakin banyak ditemukan aplikasi dan kaitan konsep himpunan pelokasian dan nilai dimensi metrik suatu graf dengan bidang-bidang ilmu lain.

Sampai saat ini, konsep himpunan pelokasian telah dipelajari secara intensif oleh banyak matematikawan. Beberapa karakterisasi graf berdimensi 1 n-1 dan n-2 telah diperoleh berturut-turut sebagai berikut: dim(G) = 1 jika dan hanya jika G adalah graf lintasan P_n, dim(G) = n-1 jika dan hanya jika G adalah graf lengkap K_n, dan dim(G) = n-2 jika dan hanya jika G adalah salah satu dari bentuk $K_{r,s}$ ($r, s \geq 1$), $K_r + \overline{K_s}$ ($r \geq 1$, $s \geq 2$), atau $K_r + (K_1 \cup K_s)$ [Chartrand, Eroh, Johnson, dan Oellermann, 2000]. Selain itu, juga telah diketahui dimensi metric beberapa kelas graf seperti graf lingkaran Cn [Chartrand, Eroh, Johnson, dan Oellermann, 2000], graf pohon T [Chartrand, Eroh, Johnson, dan Oellermann, 2000], graf dengan titik anting [Iswadi, Baskoro, Simanjuntak, dan Salman, 2008], graf amalgamasi lingkaran [Iswadi, Baskoro, Simanjuntak, dan Salman, 2010], graf hasil operasi korona [Iswadi, Baskoro, dan Simanjuntak, 2011], graf jaring sarang lebah dan segitiga [Manuel, Rajan, Rajasingh, dan Mohan, 2008], dan graf Harary, antiprisma, dan Petersen yang diperumum [Javaid, Rahman, dan Ali, 2008]. Titik x di G disebut titik dominan jika titik tersebut berjarak satu ke setiap titik lain di G. Berikut ini adalah teorema dari dimensi metric graf hasil operasi korona seperti yang ada di Iswadi dkk. (2011) [Iswadi, Baskoro, dan Simanjuntak, 2011]

Teorema A Jika $G \odot H$ adalah graf hasil operasi korona dari graf terhubung G dan graf H yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2 maka

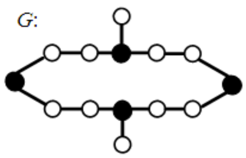
$$\dim(G \odot H) = \begin{cases} |V(G)|\dim(H), H \text{ memuat sebuah titik dominan,} \\ |V(G)|\dim(K_1 + H), \qquad \text{yang lain.} \end{cases}$$

Himpunan $W \subseteq V(G)$ disebut himpunan pendominasi dari G jika setiap titik di $V(G) - W$ bertetangga dengan sebuah titik dari W. Bilangan pendominasi $\gamma(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan pendminasi dari G. Himpunan pendominasi dengan kardinalitas γ(G) disebut dengan himpunan-γ(G). Masalah himpunan pendominasi muncul pertama kali sekitar tahun 1850 di kalangan pengemar catur di Eropa. Mereka mempunyai masalah yaitu berapa banyaknya buah ratu (queen) yang harus ditempatkan pada papan catur ukuran 8 X 8 sehingga semua petak catur tersebut dapat dikuasai oleh sekurang-kurangnya salah satu dari himpunan buah ratu tersebut. Pada saat ini kajian tentang himpunan pendominasi telah berkembang pesat. Sumber bacaan yang lengkap tentang konsep himpunan pendominasi dapat dilihat pada dua buah buku dari Haynes dkk. [Haynes, Hedetniemi, dan Slater, 1998a] dan [Haynes, Hedetniemi, dan Slater, 1998b]. Pada Gambar 2 berikut ini diilustrasikan graf G dengan 8 titik dan himpunan pendominasinya (titik-titik yang berwarna hitam).



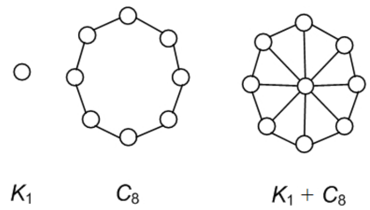
Gambar 2. Graf G dengan himpunan pendominasinya

Dua konsep di atas yakni himpunan pelokasian dan himpunan pendominasi digabung menjadi konsep himpunan pendominasi pelokasian metrik, dinotasikan dengan himpunan-MLD, dalam suatu graf terhubung G [Henning dan Oellermann, 2004]. Himpunan-MLD W di graf terhubung G adalah himpunan titik-titik dari G yang bersifat sebagai himpunan pelokasian dan himpunan pendominasi di G. Bilangan dominasi lokasi metric $\gamma_M(G)$ dari G adalah kardinalitas minimum dari suatu himpunan-MLD di G. Himpunan-MLD di G dengan kardinalitas $\gamma_M(G)$ disebut himpunan-$\gamma_M(G)$. Salah satu cara untuk mendapatkan himpunan pendominasi pelokasian metrik suatu graf G adalah dengan menggunakan hasil-hasil yang telah diketahui untuk himpunan pelokasian dan himpunan pendominasi graf G tersebut. Sebagai contoh adalah menentukan himpunan pendominasi pelokasian metrik untuk graf lingkaran 8 titik G dengan dua titik pendan seperti yang terlihat pada Gambar 3 di bawah ini. Nilai dimensi metric dari graf lingkaran telah diketahui 2 atau dim($C8$) = 2. Himpunan pelokasian dengan banyak titik dua dapat ditambahkan dua titik lagi sehingga memenuhi syarat sebagai himpunan pendominasi seperti diilustrasikan pada Gambar 3 berikut ini. Gambar 3 berikut ini adalah ilustrasi graf G dengan himpunan pendominasi pelokasian metric (titik-titik yang berwarna hitam).



Gambar 3. Graf G dengan himpunan pendominasi pelokasian metriknya.

Graf join $G + H$ didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi adalah $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy \mid x \in V(G), y \in V(H)\}$. Ilustrasi untuk graf join $W_8 = K_1 + C_8$ (disebut juga dengan graf roda) terlihat pada Gambar 4 berikut ini.



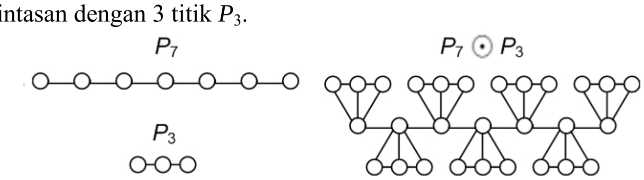
Gambar 4. Graf join $W_8 = K_1 + C_8$.

Graf hasil operasi korona $G \odot H$ didefinisikan sebagai berikut:

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} V(H_i),$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} E(H_i) \cup \{iu_i | u_i \in V(H_i)\},$$

dengan *Hi* adalah kopi dari graf *H*. Gambar 5 berikut ini adalah ilustrasi dari graf hasil operasi korona graf lintasan dengan 7 titik P_7 dan graf lintasan dengan 3 titik P_3.



Gambar 5. Graf hasil operasi korona P_7 dengan P_3.

Pada makalah ini, kami akan menentukan batas atas bilangan dominasi lokasi metric untuk graf operasi korona $G \odot H$. Penentuan batas atas ini penting untuk mendapatkan nilai eksak bilangan dominasi lokasi metric untuk graf operasi korona $G \odot H$. Penelitian lebih lanjut dibutuhkan untuk mendapatkan nilai eksak berupa penentuan batas bawah bilangan dominasi lokasi metric untuk graf operasi korona $G \odot H$.

2. Batas Atas Bilangan Dominasi Lokasi Metrik untuk Graf Hasil Operasi Korona

Misalkan $G \odot H$ adalah graf hasil operasi korona dari graf terhubung G dan graf H yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2. Dari definisi operasi korona, setiap dua titik u dan v di subgraf H_i di $G \odot H$ selalu berjarak 1 atau 2. Hal itu diakibatkan jika u dan v bertetangga di H_i maka $d(u,v) = 1$ dan jika u dan v tidak bertetangga di H_i maka $d(u,v_i) = 1 = d(v,v_i)$ atau $d(u,v) = 2$. Bukti Lema 1 berikut ini dapat diturunkan dengan mudah dari sifat membedakan dua titik dari himpunan pelokasian.

Lema 1 Misalkan W adalah himpunan pelokasian dari subgraf *Hi* dari graf korona $G \odot H$. Terdapat paling banyak satu titik yang berjarak 2 ke semua titik di W.

Notasikan titik yang berjarak 2 ke semua titik di himpunan pelokasian $W \subseteq H_i$ dengan $x_i(2,2,\ldots,2)$. Berikut ini beberapa sifat himpunan pelokasian dan dimensi metri graf hasil operasi korona. Misalkan *G* adalah graf terhubung, dua titik *u* dan *v* pada *H*, dimana *H* adalah subgraf dari *G*, dikatakan berjarak sama terhadap *H* jika $d(u,x) = d(v,x)$ untuk semua $x \in V(G) - V(H)$. Terdapat fakta tentang jarak 2 titik pada graf $G\odot H$ seperti berikut ini.

Lema B Misalkan $G\odot H$ adalah graf hasil kali korona graf terhubung *G* dan graf *H* yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2. Misalkan subgraf *Hi* adalah subgraf $G\odot H$ yang diperoleh dari kopi ke-*i* dari *H* yang terhubung dengan titik ke-*i* dari *G* pada graf $G\odot H$. Dua titik *u*, *v* di H_i berjarak sama terhadap H_i.

Lema C Misalkan *G* adalah sebuah graf terhubung dan *H* adalah sebuah graf yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2. Jika *H* memuat suatu titik dominan *v* maka $d_H(x,y) = d_{G\odot H}(x,y)$, untuk setiap *x*, *y* di *H* atau di subgraf H_i dari $G\odot H$.

Lema D Jika *G* adalah sebuah graf terhubung dan *H* adalah sebuah graf yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2 maka $d_{K1+H}(x,y) = d_{G\odot H}(x,y)$, untuk setiap *x*, *y* di *H* subgraf $K_1 + H$ atau di *H*i subgraf $G\odot H$.

Lema E Misalkan *G* adalah sebuah graf terhubung berorde *n* dan *H* adalah sebuah graf yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2

(i) Jika *S* adalah suatu himpunan pelokasian dari $G\odot H$ maka $V(Hi) \cap S \neq \emptyset$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(ii) Jika *B* adalah suatu basis dari $G\odot H$ maka $V(H_i) \cap B = \emptyset$

Lema E menyatakan bahwa basis *B* untuk $G\odot H$ diperoleh dari gabungan $W_i \subseteq H_i$. Sehingga dengan memilih W_i sebagai basis dari H_i dan dengan menggunakan Lema C dan Lema D diperoleh bahwa basis *B* adalah gabungan dari basis-basis yang ada di *H* (jika *H* memuat titik dominan) dan gabungan dari basis-basis yang ada di $K_1 + H$ (jika *H* tidak memuat titik dominan). Ide yang sama kita gunakan untuk menentukan bilangan dominasi lokasi metric untuk graf hasil operasi korona. Himpunan pendominasi pelokasian metric dapat dipilih sama dengan basis *B* untuk $G\odot H$. Hal lebih lanjut yang harus dilakukan adalah membuktikan apakah basis *B* untuk $G\odot H$ adalah himpunan pendominasi. Teorema berikut ini menyatakan batas atas bilangan dominasi lokasi metric untuk graf hasil operasi korona.

Teorema 2 Jika $G\odot H$ adalah graf hasil operasi korona dari graf terhubung *G* berorde *n* dan graf *H* yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2 maka

$$\gamma_M(G\odot H) \leq \begin{cases} |V(G)|\left(\dim(H)+1\right), H \text{ memuat sebuah titik dominan,} \\ |V(G)|\left(\dim(K_1+H)+1\right), \quad \text{yang lain.} \end{cases}$$

Bukti: Misalkan *B* adalah sebuah basis dari $G\odot H$. Misalkan *Hi* adalah sebuah kopi ke-*i* dari *H* yang terhubung dengan titik ke-*i* dari *G* di $G\odot H$ dengan $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Kasus 1 *H* memuat sekurang-kurangnya satu titik dominan.

Misalkan *W* adalah sebuah basis dari *H*. Nyatakan $W_i = W$ pada subgraf H_i dari $G\odot H$. Bentuk himpunan

$$S = \cup_1^n \left(W_i \cup \{x_i(2,2,\ldots,2)\}\right).$$

Akan ditunjukkan bahwa *S* adalah himpunan pelokasian dari $G\odot H$. Jelas bahwadengan menggunakan Lema B dan Lema C dan karena *W* adalah sebuah basis dari *H*, representasi setiap $v \in V(H_i) - S$ selalu tunggal terhadap *S*. Setiap titik v_i di subgraf *G* dari $G\odot H$ mempunyai representasi yang tunggal karena berjarak 1 ke semua titik $W_i \cup \{x_i(2, 2, \ldots, 2)\}$ dan

$d(v_i,w_j) < d(u,w_j)$ untuk setiap $u \in V(H_i) - S$, $w_j \in W_j \cup \{x_j(2, 2, \ldots, 2)\}$, dan $j \neq i$. Jadi representasi setiap titik v di $G\odot H$ terhadap S berbeda. Jadi S adalah himpunan pelokasian untuk $G\odot H$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa S adalah himpunan pendominasi untuk $G\odot H$. Dengan menggunakan Lema 1, diperoleh bahwa untuk setiap $v \in V(H_i) - S$ maka v bertetangga dengan salah satu dari titik u di S. Kemudian juga jelas bahwa v_i bertetangga dengan titik-titik di $W_i \cup \{x_i(2, 2, \ldots, 2)\}$. Jadi setiap titik $v \in V(G\odot H) - S$ bertetangga dengan salah satu dari titik di S. Jadi S adalah himpunan pendominasi untuk $G\odot H$. Dari dua kesimpulan di atas diperoleh bahwa S adalah himpunan pendominasi pelokasian metric untuk $G\odot H$. Karena $\gamma_M(G\odot H)$ adalah kardinalitas minimum dari suatu himpunan pendominasi pelokasian metric untuk $G\odot H$ maka $\gamma_M(G\odot H) \leq |S| = n|W_i \cup \{xi(2, 2, \ldots, 2)\}| = |V(G)|(\dim(H) + 1)$.

Kasus 2 H tidak memuat titik dominan.

Kasus 2 ini dibuktikan dengan cara yang sama dengan kasus 1. Pada kasus ini kita menggunakan basis dari $K_1 + H$ dan Lema D menggantikan basis dari H dan Lema C pada kasus 1. □

3. Daftar Pustaka

Daftar pustaka hanya berisi pustaka yang diacu dalam tulisan. Penulisan menggunakan format APA, seperti di bawah.

[1] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A., dan Oellermann, O.R. (2000), Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.*, 105, 99 - 113.

[2] Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T., dan Slater, P.J., (1998a), *Fundamentals of Domination in Graphs*, New York, Marcel Dekker.

[3] Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T., dan Slater, P.J., (1998b), *Domination in Graphs : Advanced Topics*, New York, Marcel Dekker.

[4] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., dan Salman, A.N.M. (2008), The metric Dimension of Graphs with Pendant Edges, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 65, 1 - 8.

[5] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., dan Salman, A.N.M. (2010), Metric Dimension of Amalgamation of Cycles, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 41:1, 19 – 31.

[6] Iswadi, H., Baskoro, E.T., dan Simanjuntak, R. (2011), *The Metric Dimension of Corona Product of Graphs, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, sudah diterima untuk terbit Mei 2011.

[7] Javaid, I., Rahman, M.T., dan Ali, K. (2008), Families of Reguler Graphs with Constant Metric Dimension, *Util. Math.*, 75, 21 – 33.

[8] Manuel, P., Rajan, B., Rajasingh, I., dan Mohan, C.M. (2008), On Minimum Metric Dimension of Honeycomb Networks, J. Discrete Algorithms, 6, 20 – 27.