BILANGAN DOMINASI LOKASI METRIK DARI GRAF HASIL OPERASI KORONA

Hazrul Iswadi

Department of MIPA,
Gedung TG lantai 6, Universitas Surabaya,
Jalan Raya Kalirungkut Surabaya 60292, Indonesia.
hazrul_iswadi@ubaya.ac.id

Abstract

For an ordered set $W = w_1, w_2, \cdots, w_k$ of vertices and a vertex v in a connected graph G, the representation of v with respect to W is the ordered k-tuple $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k))$, where $d(x, y)$ represents the distance between the vertices x and y. The set W is called a locating set for G if every vertex of G has a distinct representation. A locating set containing a minimum number of vertices is called a basis for G. The metric dimension of G, denoted by $\dim(G)$, is the number of vertices in a basis of G. A set W of vertices of a connected graph G is a dominating set of G if every vertex in $V(G) - W$ is adjacent to a vertex of W. A dominating set W in a connected graph G is a metric-locating-dominating set, or an MLD-set, if W is both a dominating set and a locating set in G. The metric location domination number $\gamma_M(G)$ of G is the minimum cardinality of an MLD-set in G. A graph G corona H, $G \odot H$, is defined as a graph which formed by taking $|V(G)|$ copies of graphs $H_1, H_2, \cdots, H_n$ of H and connecting i-th vertex of G to every vertices of H_i. We determine the metric-location-domination number of corona product graphs in terms of the metric dimension of G or H.

Keywords and phrases: Metric dimension, metric-locating-dominating set, metric-location-domination number, corona product graph.

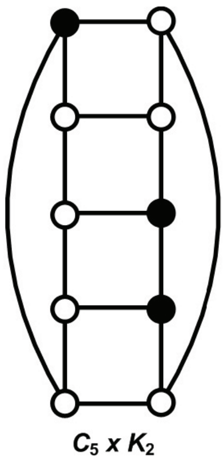
2000 Mathematics Subject Classifications: 05C12

1 Pendahuluan

Graf $G = G(V, E)$ didefinisikan sebagai suatu sistim matematika yang terdiri dari himpunan titik tak kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang menghubungkan dua titik tak terurut di $V(G)$. Banyaknya anggota pada himpunan titik $V(G)$ (kardinalitas), dinotasikan dengan $|V(G)|$, disebut dengan orde dari graf G. Graf G disebut graf sederhana jika setiap sisi pada graf G menghubungkan dua titik yang berbeda dan setiap dua titik yang berbeda di graf G hanya dihubungkan oleh satu sisi. Graf G dikatakan terhubung jika setiap dua titik u dan v di graf G selalu terdapat lintasan yaitu barisan selang-seling titik dan sisi yang menghubungkan u dengan v. Pada makalah ini, graf G yang ditinjau adalah graf sederhana dan terhubung. Istilah dan notasi yang digunakan pada makalah ini mengacu pada buku Graphs and Digraphs karya Chartrand dan Lesniak [Chartrand dan Lesniak, 2000].

Makalah ini membahas persoalan menentukan bilangan dominasi lokasi metrik dari graf hasil operasi korona. Konsep dominasi lokasi metrik merupakan gabungan dari konsep dominasi dan lokasi metrik. Konsep dominasi pertama kali diperkenalkan di Eropa sekitar tahun 1850 di kalangan para pengemar catur, sedangkan konsep lokasi metrik baru mulai dikembangkan secara independen oleh Slater tahun 1975 dan Harary dkk tahun 1976.

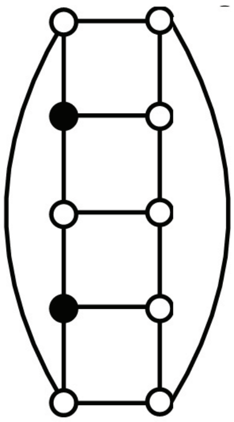
Himpunan $W \subseteq V(G)$ disebut himpunan pendominasi dari G jika setiap titik di $V(G) - W$ bertetangga dengan sebuah titik dari W. Bilangan pendominasi $\gamma(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan pendminasi dari G. Himpunan pendominasi dengan kardinalitas $\gamma(G)$ disebut dengan himpunan-$\gamma(G)$. Pada saat ini kajian tentang himpunan pendominasi telah berkembang pesat. Sumber bacaan yang lengkap tentang konsep himpunan pendominasi dapat dilihat pada dua buah buku dari Haynes dkk. [Haynes dkk, 1998a] dan [Haynes dkk, 1998b]. Pada Gambar 1 berikut ini diilustrasikan salah satu himpunan pendominasi dari graf hasil kali Kartesius C_5 dengan K_2 (himpunan pendominasinya adalah himpunan dari titik-titik yang berwarna hitam).



Gambar 1. Himpunan pendominasi dari graf $C_5 \times K_2$.

Jarak antara dua titik u dan v $d_G(u, v)$ di suatu graf terhubung G adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G. Notasi jarak antara dua titik u dan v hanya di tulis $d(u, v)$ jika graf G yang disinggung sudah diketahui dari konteks. Misalkan

$v \in V(G)$. Representasi dari v terhadap W di G adalah vektor dengan k unsur $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k))$ dengan komponennya adalah jarak dari v ke semua titik di W. Himpunan W disebut dengan himpunan pelokasian untuk G jika $r(u|W) = r(v|W)$ maka $u = v$ untuk semua u, v di G. Suatu himpunan pelokasian dengan kardinalitas minimum disebut dengan basis untuk G. Dimensi metrik untuk G, dinotasikan dengan $\dim(G)$, adalah banyaknya titik-titik dalam sebuah basis untuk G. Untuk menentukan apakah W adalah sebuah himpunan pelokasian untuk G, kita hanya perlu memeriksa representasi dari titik-titik $V(G) - W$ karena representasi dari masing-masing w_i di W mempunyai bernilai '0' pada komponen ke-i; sehingga representasi dari w_i selalu tunggal.Pada Gambar 2 berikut ini diilustrasikan salah satu himpunan pelokasian dari graf hasil kali Kartesius C_5 dengan K_2 (himpunan pelokasiannya adalah himpunan dari titik-titik yang berwarna hitam).



Gambar 2. Himpunan pelokasian graf $C_5 \times K_2$.

Henning dan Oellermann menggabungkan konsep himpunan pendominasi dan himpunan pelokasian menjadi konsep himpunan pendominasi pelokasian metrik [Henning dan Oellermann, 2004]. Himpunan-MLD W di graf terhubung G adalah himpunan titik-titik dari G yang bersifat sebagai himpunan pelokasian dan himpunan pendominasi di G. Bilangan dominasi lokasi metric $\gamma_M(G)$ dari G adalah kardinalitas minimum dari suatu himpunan-MLD di G. Himpunan-MLD di G dengan kardinalitas $\gamma_M(G)$ disebut himpunan-$\gamma_M(G)$.

Teorema berikut menyatakan karakterisasi dari graf yang mempunyai bilangan dominasi lokasi metrik 1. Teorema ini dibuktikan oleh Henning dan Oellermann [Henning dan Oellermann, 2004].

Teorema A. *Jika G adalah graf dengan orde $n \geq 2$ maka $\gamma_M(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_2$.*

Misalkan graf join G dan H, dinotasikan dengan $G+H$, diperoleh dengan menggabungkan graf G dan H ditambah dengan semua sisi yang menghubungkan setiap titik di graf G dengan setiap titik di graf H. Misalkan K_n dan $K_{r,s}$ secara berturut-turut adalah graf lengkap dengan n titik dan graf bipartit lengkap dengan kardinalitas himpunan partit s dan t. Misalkan $\mathfrak{A}$ adalah keluarga graf $\{\{K_n\},\{K_{1,n-1}\}\}$ dan $\mathfrak{B}$ adalah keluarga graf $\{\{\overline{K_m}+K_1+K_1+\overline{K_k}\},\{K_m+K_1+\overline{K_m}, m\geq 2, k\geq 2\},\{K_1+\overline{K_m}+K_1+\overline{K_k}, m\geq 2\},\{(K_1+\overline{K_m})+K_1+\overline{K_k}, m\geq 2\},\{K_{s,t}, 2\leq s\leq t\},\{K_s+\overline{K_t}, 2\leq s, 2\leq t\},\{K_1+K_s+K_t, 1\leq s, 2\leq t\}\}$. Teorema-teorema berikut ini berasal dari Henning dan Oellermann [Henning dan Oellermann, 2004] yang menyatakan karakterisasi graf yang mempunyai bilangan dominasi lokasi metrik $n-1$ dan $n-2$.

Teorema B. *Jika G adalah graf dengan orde $n\geq 2$ maka $\gamma_M(G)=n-1$ jika dan hanya jika $G\in\mathfrak{A}$.*

Teorema C. *Jika G adalah graf dengan orde $n\geq 4$ maka $\gamma_M(G)=n-2$ jika dan hanya jika $G\in\mathfrak{B}$.*

Caceres dkk [Caceres dkk, 2009] telah membuktikan salah sifat yang mengkaitkan ketiga bilangan $\gamma(G)$, $\dim(G)$, dan $\gamma_M(G)$ seperti yang dinyatakan pada lema berikut.

Lema D. *Untuk setiap graf terhubung G berlaku*

$$\max\{\gamma(G), dim(G)\}\leq \gamma_M(G).$$

Iswadi [Iswadi, 2011] telah menunjukkan batas atas bilangan dominasi lokasi metrik dari graf hasil operasi korona $G\odot H$. Makalah ini akan melanjutkan usaha tersebut dengan menentukan batas bawah bilangan dominasi lokasi metrik dari graf hasil operasi korona $G\odot H$ untuk graf H tertentu.

2 Graf Hasil Operasi Korona

Graf hasil operasi korona $G\odot H$ didefinisikan sebagai suatu graf yang dibentuk dari graf G dan H dengan himpunan titik dan himpunan sisinya berturut-turut adalah

$$V(G\odot H)=V(G)\cup\bigcup_{i\in V(G)} V(H_i)$$

dan

$$E(G\odot H)=E(G)\cup\bigcup_{i\in E(G)} V(H_i)\cup\{iu_i|u_i\in V(H_i)\},$$

dengan H_i adalah kopi dari graf H.

Payan dan Xuong [Payan dan Xuong, 1982] dan Fink dkk [Fink dkk, 1985] secara independen mengkarakterisasi graf yang mempunyai bilangan dominasi setengah dari ordenya seperti yang dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema E. *Untuk suatu graf G dengan orde genap dan tanpa titik terisolasi, $\gamma(G) = n/2$ jika dan hanya jika komponen dari G adalah lingkaran C_4 atau korona $H \odot K_1$ untuk suatu graf terhubung H.*

Yero dkk [Yero dkk, 2010] telah menunjukkan batas atas untuk dimensi metrik $H \odot K_1$ seperti yang dinyatakan sebagai berikut.

Teorema F. *Untuk suatu graf G dengan orde $n \geq 2$,*

$$dim(G \odot K_1) \leq n - 1.$$

Iswadi dkk [Iswadi dkk, 2011] telah membuktikan nilai dimensi metrik dari graf hasil operasi korona seperti yang dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema G. *Jika $G \odot H$ adalah graf hasil operasi korona dari graf terhubung G dan graf H yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2 maka*

$$dim(G \odot H) = \begin{cases} |G|dim(H), & \text{jika } H \text{ memuat sebuah titik dominan;} \\ |G|dim(K_1 + H), & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Lebih jauh, Iswadi [Iswadi, 2011] telah menunjukkan batas atas untuk nilai bilangan dominasi lokasi metrik dari graf hasil operasi korona seperti yang dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema H. *Jika $G \odot H$ adalah graf hasil operasi korona dari graf terhubung G dan graf H yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2 maka*

$$\gamma_M(G \odot H) \leq \begin{cases} |G|(dim(H) + 1), & \text{jika } H \text{ memuat sebuah titik dominan;} \\ |G|(dim(K_1 + H) + 1), & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Berikut ini, kita akan menunjukkan batas bawah untuk nilai bilangan dominasi lokasi metrik dari graf hasil operasi korona.

Teorema 1. *Jika $G \odot H$ adalah graf hasil operasi korona dari graf terhubung G dan graf H yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2 maka*

$$\gamma_M(G \odot H) \geq \begin{cases} |G|, & jika\ |H| = 1; \\ dim(G \odot H), & jika\ |H| \geq 2. \end{cases}$$

Bukti *Kasus 1.* $|H| = 1$. Berdasarkan Teorema E, $\gamma(G \odot H) = \gamma(G \odot K_1) = n$. Kemudian dengan menggunakan Teorema F, diperoleh bahwa $\dim(G \odot H) = \dim(G \odot K_1) \leq n - 1$. Dengan menggabungkan kedua fakta tersebut diperoleh bahwa $\gamma_M(G \odot H) \geq \max\{\gamma(G \odot H),\ \dim(G)\} = n = |G|$.
Kasus 2. $|H| \geq 2$. Pada kasus ini kita akan menunjukkan bahwa $\dim(G \odot H) \geq \gamma(G \odot H)$ untuk setiap graf G terhubung dan graf H yang memiliki orde sekurang-kurangnya 2. Misalkan $D = V(G) \subseteq V(G \odot H)$. Karena setiap titik i di G terhubung dengan setiap titik H_i di $G \odot H$ maka D adalah himpunan pendominasi di $G \odot H$. Lebih jauh, untuk setiap himpunan dominasi lain D' dengan $|D'| \leq |G|$ maka terdapat sekurang-kurangnya satu titik anting di $G \odot K_1$ yang tidak bertetangga dengan setiap titik di D', kontradiksi. Jadi $\gamma(G \odot H) = |G|$. Karena $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$ [Chartrand, 2000] maka $\dim(H) \geq 1$ untuk $|H| \geq 2$ dan H memuat titik dominan dan $\dim(H + K_1) \geq 1$ untuk $|H| \geq 2$ dan H tidak memuat titik dominan. Sehingga $\dim(G \odot H) \geq \gamma(G \odot H)$. Jadi nilai $\gamma_M(G \odot H)$ sekurang-kurangnya adalah nilai $\dim(G \odot H)$ atau $\gamma_M(G \odot H) \geq \dim(G \odot H)$. ♠

Misalkan $W = V(G)$ di $G \odot K_1$ adalah himpunan pelokasian dari $G \odot K_1$. Mudah diperlihatkan bahwa W juga himpunan pendominasi di $G \odot K_1$. Dengan menggunakan Teorema F, kita dapatkan batas atas dari $\gamma_M(G \odot K_1)$ yaitu $\gamma_M(G \odot K_1) \leq n - 1 < n = |G|$. Sehingga kita dapatkan akibat berikut ini secara langsung.

Akibat 1. *Jika graf G adalah graf terhubung dengan orde sekurang-kurangnya 2 maka $\gamma_M(G \odot K_1) = |G|$.*

Untuk graf H yang lain dari K_1, kita dapat akibat berikut ini, dengan menggunakan Teorema H dan Teorema 1.

Akibat 2. *Jika graf G adalah graf terhubung dan graf H memiliki orde sekurang-kurangnya 2 maka*

$$dim(G \odot H) \leq \gamma_M(G \odot H) \leq dim(G \odot H) + 1.$$

Berdasarkan sifat operasi korona dari graf G dan H, setiap dua titik u dan v di subgraf H_i selalu berjarak 1 atau 2. Iswadi [Iswadi, 2011] telah menyatakan sifat titik yang selalu berjarak 2 ke semua titik himpunan pelokasian W di $G \odot H$ seperti yang tercantum pada lema berikut.

Lema I. *Misalkan H_i adalah subgraf $G \odot H$ dan W_i adalah himpunan pelokasian $G \odot H$ yang berada pada suatu subgraf H_i. Terdapat paling banyak satu titik di H_i yang berjarak 2 ke semua titik di W_i.*

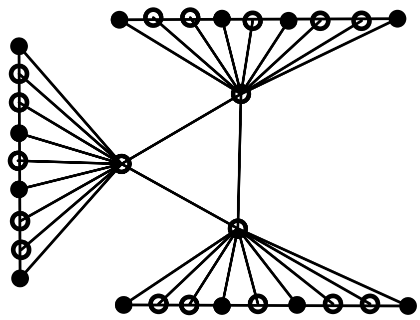
Notasikan titik yang berjarak 2 ke semua titik di himpunan pelokasian $W_i \subseteq H_i$ dengan $x_i(2, 2, \cdots, 2)$. Berikut ini sifat yang menyatakan kapan $\gamma_M(G \odot H) = dim(G \odot H)$

Teorema 2. *Misalkan H_i adalah subgraf $G \odot H$ dan W_i adalah himpunan pelokasian $G \odot H$ yang berada pada suatu subgraf H_i. Jika H_i tidak memuat titik $x_i(2, 2, \cdots, 2)$ yang berjarak 2 ke semua titik di W_i maka*

$$\gamma_M(G \odot H) = dim(G \odot H).$$

Bukti Kita cukup menunjukkan bahwa $\gamma_M(G \odot H) \leq dim(G \odot H)$. Jika subgraf H_i tidak memuat $x_i(2, 2, \cdots, 2)$ maka setiap titik $V(H_i) - W_i$ akan berjarak 1 ke sekurang-kurangnya satu titik di W_i, untuk setiap $i \in \{1, 2, \cdots, |G|\}$. Sedangkan setiap titik i di G akan berjarak satu ke titik-titik di W_i. Sehingga $D = \bigcup_{i \in G} W_i$ adalah himpunan pendominasi sekaligus himpunan pelokasian dari $G \odot H$. Jadi diperoleh $\gamma_M(G \odot H) \leq dim(G \odot H)$. ♠

Ilustrasi untuk Teorema 2 terlihat pada Gambar 3 berikut ini. Pada Gambar 3, graf G adalah C_3 dan graf H adalah P_9. Diketahui $\dim(P_9) = \left\lfloor \frac{2(9)+2}{5} \right\rfloor = 4$. P_9 tidak memiliki titik dominan dan subgraf $H_i \cong P_9$ dari $C_3 \odot P_9$ tidak memiliki titik $x_i(2, 2, \cdots, 2)$, untuk setiap $i \in \{1, 2, 3\}$. Jadi diperoleh $\gamma_M(C_3 \odot P_9) = \dim(C_3 \odot P_9)$ $= 3\text{x}5 = 15$.



Korona graf C_3 dengan graf P_9

Gambar 3. graf $C_3 \odot K_2$ dan himpunan pendominasi dan pelokasiannya (titik yang berwarna hitam).

Daftar Pustaka

1. Caceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I.M., dan Puertas, M.L., On Locating and Dominating Sets in Graphs, *Proceeding of I Workshop de Matemática Discreta Algarve - Adalucia*, Oktober 2009, Galaroza, Spanyol, hal. 19–22.

2. Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A., dan Oellermann, O.R., Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.*, **105** (2000), hal. 99–113.

3. Chartrand, G. dan Lesniak, L., *Graphs and Digraphs*, edisi 3, Chapman and Hall/CRC, 2000.

4. Fink, J.F., Jacobson, M.S., Kinch, L.F., dan Roberts, J., On graphs having domination number half their order, *Period. Math. Hungar.* **16**(1985), hal. 287–293.

5. Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T., dan Slater, P.J., *Fundamentals of Domination in Graphs*, New York, Marcel Dekker, 1998a.

6. Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T., dan Slater, P.J., *Domination in Graphs: Advanced Topics*, New York, Marcel Dekker, 1998b.

7. Henning, M.A., dan Oellermann, O.R., Meteric-Locating-Dominating Sets in Graphs, *Ars Combinatorica*, **73** (2004), hal. 129–141.

8. Iswadi, H., Baskoro, E.T., dan Simanjuntak, R., The Metric Dimension of Corona Product of Graphs, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), sudah diterima untuk terbit Mei 2011.

9. Iswadi, H., Batas Atas Bilangan Dominasi Lokasi Metrik dari Graf Hasil Operasi Korona, *Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Multimedia 2011*, 21 Mei 2011, Universitas Surabaya, Surabaya, hal. C40–C50.

10. Payan, C., dan Xuong, N.H., Domination-balanced graphs, *J. Graph Theory*, **6**(1982), hal. 23–32.

11. Yero, I.G., Kuziak, D., dan Rodríguez-Velázquez, J.A., On the metric dimension of corona product graphs, arXiv:1009.2586v2 [math.CO], 7 Oct 2010.