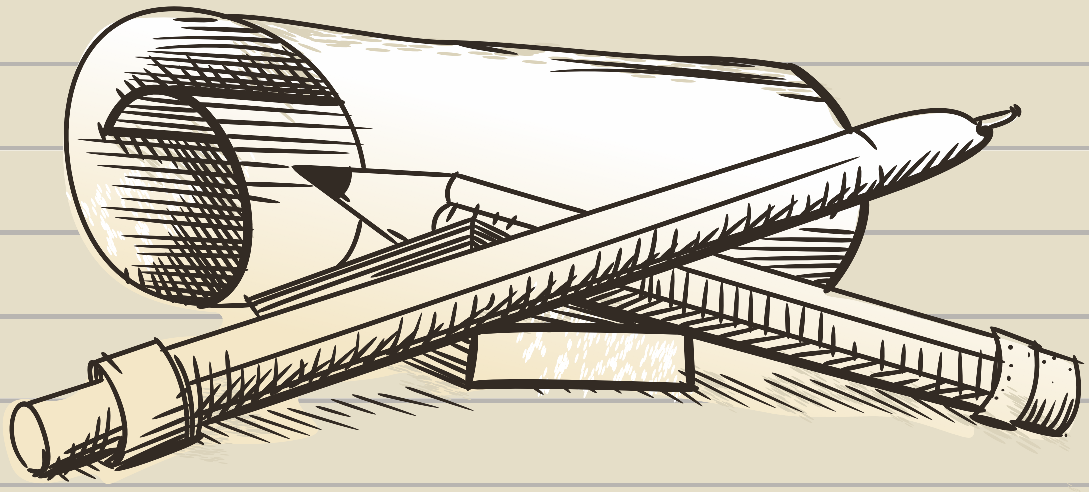


EPS

Materi UTS

Matematika Optimisasi

Semester Gasal 2016 - 2017

Pengajar: Hazrul Iswadi

Daftar Isi

Matematika Optimasi 1600A105

Pendahuluan UTS
Semester Gasal 2016-2017

Materi per Pertemuan

Pertemuan	Materi	Tugas/Kuis
1	Deret Aritmatika, Deret Geometri, Persamaan Garis, Bidang Datar	-
2	Bidang Kuadrik	Tugas 1
3	Turunan Parsial, Turunan Parsial Fungsi Komposisi, Diferensial Total, Aturan Rantai Fungsi Komposisi	Tugas 2
4	Gradien, Turunan Berarah, Bidang Singgung, Masalah Maks-Min	Tugas 3, Kuis 1
5	Aplikasi Turunan dengan Menggunakan Pengali Lagrange, Integral sebagai Anti Turunan, Integral Rangkap 2	Tugas 4
6	Koordinat Polar, Integral Lipat 2 dalam Sistim Koordinat Polar, Integral Lipat 3	Tugas 5
7	Aplikasi Integral Multivariabel	Kuis 2

Kuis

1. Diselenggarakan di awal perkuliahan, waktu 50-60 menit, soal 3-4.
2. ***Materi kuis 1***: Deret Aritmatika, Deret Geometri, Persamaan Garis, Bidang Datar, Bidang Kuadrik, Turunan Parsial, Turunan Parsial Fungsi Komposisi, Diferensial Total, Aturan Rantai Fungsi Komposisi
3. ***Materi kuis 2***: Gradien, Turunan Berarah, Masalah Maks-min, Aplikasi Turunan dengan Menggunakan Pengali Lagrange, Integral Lipat 2 dalam Sistem Koordinat Cartesius, Koordinat Polar, Integral lipat 2 dalam Sistem Koordinat Polar

Format Tugas

- Satu kelompok ***terdiri dari 5-6 mahasiswa***.
- Kelompok dan anggota kelompok dibentuk pada minggu ke-1.
- Ditulis pada ***kertas A4 HVS, tidak bolak-balik***.
- ***Pakai template cover*** yang diberikan.
- ***Distaples 2 buah dipinggir***.

Penilaian

1. ***NTS = 20% rata-rata tugas 1-5 + 20% rata-rata kuis 1-2 + 60% UTS***
2. ***NAS = 20% rata-rata tugas 6-10 + 20% rata-rata kuis 3-4 + 60% UAS***

Sumber Materi Kuliah

Buku-buku:

1. Blank, B.E, dan Krantz, S.G., Dale Varberg, *Calculus – Multivariable*, edisi 2, John Wiley & Sons, Inc., 2011.
2. Hughes-Hallett, D., dkk., *Calculus – Single and Multivariable*, edisi 6, John Wiley & Sons, Inc., 2013
3. ***Larson, R., dan Bruce, E., Calculus, edisi 10, John Wiley & Sons, Inc., 2014***.
4. Siswantoro, J., dkk., *Diktat Kalkulus 2*, Universitas Surabaya, 2009.

Slide, Tugas, Nilai, dan Pengumuman dapat dilihat di:

1. Ubaya Learning Space, ***uls.ubaya.ac.id***
2. Hazrul Iswadi Personal Web, ***www.hazrul-iswadi.com***

PERTEMUAN 1

- Deret Aritmatika
- Deret Geometri
- Persamaan Garis
- Persamaan Bidang Datar

Barisan Aritmatika

Sifat

$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \ldots =$ konstanta = beda

Rumus suku ke-n: $u_n = a + (n-1)b$

$a = u_1 =$ ***suku pertama***

$b =$ ***beda***

Barisan Geometri

Sifat

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \cdots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

Rumus suku ke-n

$$u_n = ar^{n-1}$$

$a = u_1$ = suku pertama, r = rasio

DERET

Deret adalah jumlahan suku-suku barisan, dari suku pertama sampai dengan suku ke-n, yang dinotasikan sebagai

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

atau dalam notasi sigma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

DERET TAK HINGGA

Deret tak hingga adalah jumlahan suku-suku barisan, sampai dengan suku tak hingga, yang dinotasikan sebagai

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

Contoh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots$$

DERET ARITMETIKA

Dikenal juga sebagai ***deret hitung yaitu suatu deret dengan ciri setiap dua suku yang berurutan mempunyai selisih yang sama***

Bentuk Umum

$$\sum_{i=1}^{n} a + (i-1)b$$

a suku awal, b beda, bentuk suku ke- n $u_n = a + (n-1)b$.
Jumlahan n suku pertama

$$S_n = \frac{n}{2}(a + u_n).$$

DERET GEOMETRI

Dikenal juga sebagai ***deret ukur yaitu suatu deret dengan ciri setiap dua suku yang berurutan mempunyai rasio yang sama***

Bentuk umum

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1}$$

a suku awal, *r* rasio.

Jumlah n suku pertama

Untuk r > 1,

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Untuk r < 1,

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Untuk –1< r < 1 dan n = tak berhingga

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

S berarti jumlah takberhingga dari barisan geometri.

8

CONTOH

Jika $S_n = 4n^2 - 3n$ maka dapatkan suku ke 10 deret ini adalah

$u_{10} = S_{10} - S_9$

$= (4.10^2 - 3.10) - (4.9^2 - 3.9)$

$= 370 - 297$

$= 73.$

CONTOH

Tentukan jumlahan dari

$$\sum_{n=4}^{20} (4n + 3)$$

Solusi:

$$\sum_{n=4}^{20} (4n + 3) = \frac{1}{2}.17.(19 + 83) = 867.$$

Menentukan Persamaan Bidang

1. Satu titik di bidang $P_0: (x_0, y_0, z_0)$.
2. Satu vektor tegak lurus bidang $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$.

Jika $P: (x, y, z)$ titik lain di bidang maka persamaan sebuah bidang dapat dihitung dengan rumus

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0.$$

Persamaan umum bidang adalah:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Contoh

Tentukan persamaan bidang yang melewati titik (2, 4, -1) dengan vektor normal $\hat{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$. Tentukan titik-titik potong bidang tersebut dengan sumbu-sumbu koordinat dan sketsa bidang yang diperoleh tersebut.

Solusi:

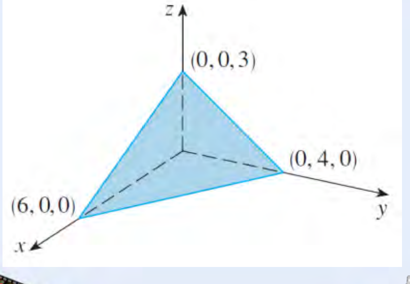
Dari soal diketahui $a = 2, b = 3, c = 4$ dan $x_0 = 2, y_0 = 4, z_0 = -1$, persamaan bidang adalah

$$2(x-2) + 3(y-4) + 4(z+1) = 0$$
$$2x + 3y + 4z = 12$$

- Perpotongan dengan sumbu-x terjadi saat $y = z = 0$, diperoleh $x = 6$. Jadi titik perpotongan bidang $2x + 3y + 4z = 12$ dengan sumbu-x adalah (6, 0, 0).

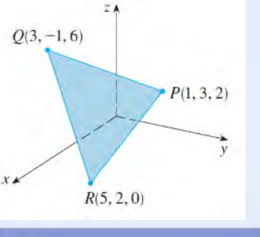
- Perpotongan dengan sumbu-y terjadi saat $x = z = 0$, diperoleh $y = 4$. Jadi titik perpotongan bidang $2x + 3y + 4z = 12$ dengan sumbu-y adalah (0, 4, 0).
- Perpotongan dengan sumbu-z terjadi saat $x = y = 0$, diperoleh $z = 3$. Jadi titik perpotongan bidang $2x + 3y + 4z = 12$ dengan sumbu-z adalah (0, 0, 6).

Sketsa persamaan bidang $2x + 3y + 4z = 12$ adalah



CONTOH

Tentukan persamaan bidang yang melewati titik-titik $P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$, dan $R(5,2,0)$.



Solusi:

Dengan memasukkan nilai x, y, z dari titik-titik yang diketahui ke persamaan bidang $ax + by + cz + d = 0$ diperoleh 3 persamaan

$$a + 3b + 2c + d = 0,$$
$$3a - b + 6c + d = 0,$$
$$5a + 2b + d = 0.$$

Penyelesaian 3 persamaan dengan 4 variabel di atas menghasilkan salah satu nilai $a = 6, b = 10, c = 7, d = -50$. Jadi diperoleh persamaan bidang

$$6x + 10y + 7z = 50.$$

Posisi antara Dua Bidang

Diketahui dua bidang

$$H_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ dan}$$
$$H_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

dengan $\vec{n_1} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ dan $\vec{n_2} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ diperoleh 3 kemungkinan posisi antara 2 bidang:

- **Berimpit**
- **Sejajar**
- **Berpotongan**

3 Kemungkinan Posisi antara 2 Bidang

1. **Bidang-bidang H_1 dan H_2 akan *berimpit* jika**
   $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$ **dan** $d_1 = kd_2$
2. **Bidang-bidang H_1 dan H_2 akan *sejajar* jika**
   $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$ **dan** $d_1 \neq kd_2$.
3. **Bidang-bidang H_1 dan H_2 akan *berpotongan* jika**
   $\vec{n_1} \neq k\vec{n_2}$.

Contoh

Tentukan posisi antara bidang-bidang berikut

1. $2x + 2y + z - 4 = 0$ dan $2x + 2y + z - 8 = 0$.
2. $2x + 2y + z - 4 = 0$ dan $x - y + z - 8 = 0$

Solusi:

1. Karena Vektor-vektor normal $\vec{n_1} = \langle 2, 2, 1 \rangle = \vec{n_2}$ dan $d_1 = -4 \neq -8 = d_2$ maka bidang-bidang $2x + 2y + z - 4 = 0$ dan $2x + 2y + z - 8 = 0$ adalah sejajar.
2. Karena Vektor-vektor normal $\vec{n_1} = \langle 2, 2, 1 \rangle \neq \langle 1, -1, 1 \rangle = \vec{n_2}$ dan maka bidang-bidang $2x + 2y + z - 4 = 0$ dan $x - y + z - 8 = 0$ adalah berpotongan.

Sudut antara dua bidang

Rumus sudut antara dua bidang

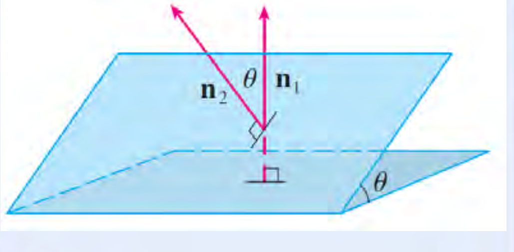
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|}\right)$$

dengan

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$,

$\|\vec{n_1}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2}$, dan

$\|\vec{n_2}\| = \sqrt{(a_2)^2 + (b_2)^2 + (c_2)^2}$.



Contoh

Tentukan sudut antara bidang

$$x + y + z = 1$$

dan

$$x - 2y + 3z = 1.$$

Solusi:

Dengan $\overrightarrow{n_1} = \langle 1, 1,1 \rangle$ dan $\overrightarrow{n_1} = \langle 1, -2,2 \rangle$, diperoleh

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{\langle 1, 1,1 \rangle \cdot \langle 1, -2,2 \rangle}{\|\langle 1, 1,1 \rangle\|\|\langle 1, -2,2 \rangle\|}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^0$$

Jarak antara Titik dengan Bidang

Misalkan titik $P_0\colon (x_0, y_0, z_0)$ dan bidang $H\colon ax + by + cz + d = 0$

Rumus jarak antara titik dan garis adalah:

$$\boldsymbol{d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Contoh

Tentukan jarak antara bidang-bidang paralel

$$10x + 2y - 2z = 5$$

dan

$$5x + y - z = 1.$$

Solusi:

Ambil satu titik pada suatu bidang dan tentukan jarak titik tersebut ke bidang yang lain.
Ambil titik dengan $y = z = 0$ pada bidang pertama, diperoleh $x = \frac{1}{2}$ atau titik $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

Jarak titik $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ ke bidang $5x + y - z = 1$ adalah

$$d = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Menentukan Persamaan Garis

1. Satu titik di garis $\boldsymbol{P_0\colon (x_0, y_0, z_0)}$.
2. Satu vektor sejajar/searah garis $\boldsymbol{\vec{v} = \langle a, b, c \rangle}$.

Jika $P\colon (x, y, z)$ titik lain di garis maka persamaan garis dapat dihitung dengan rumus

$$\overrightarrow{PP_0} = k\vec{v}.$$

Persamaan Umum Garis

- Bentuk persamaan

$$\boldsymbol{x = x_0 + ka}$$
$$\boldsymbol{y = y_0 + kb}$$
$$\boldsymbol{z = z_0 + kc}$$

- Bentuk parameter

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

6

Contoh

Tentukan

a. persamaan parameter dari garis yang melalui titik (5, 1, 3) dan sejajar dengan vektor $\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$.

b. dua titik lain di garis.

Solusi:

a. Vektor arah $\vec{v}$ dapat diperoleh vektor $\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$. Jadi $\vec{v} = \langle 1,4,-2 \rangle$. Sehingga persamaan parameter garis yang melalui titik (5, 1, 3) dengan vektor arah $\vec{v} = \langle 1,4,-2 \rangle$ adalah

$$x = 5 + t, y = 1 + 4t, z = 3 - 2t.$$

b. Ambil $t = 1$ dan $t = -1$ diperoleh titik (6, 5, 1) dan (4, -3, 5) berada di garis.

Contoh

Tentukan

a. persamaan parameter dan persamaan simetris dari garis yang melewati titik-titik $A(2, 4, -3)$ dan $B(3, -1, 1)$.

b. pada titik manakah garis ini akan menembus bidang-xy.

Solusi:

a. Vektor arah $\vec{v}$ dapat diperoleh vektor antara titik $A(2, 4, -3)$ dan$B(3, -1, 1)$. Jadi vektor arah $\vec{v} = \langle 3-2, -1-4, 1+3 \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle$.

Persamaan parameter garis yang melewati titik $A(2, 4, -3)$ dan memiliki vektor arah $\vec{v} = \langle 1, -5, 4 \rangle$ adalah

$$x = 2 + t, y = 4 - 5t, z = -3 + 4t.$$

dan persamaan simetrisnya adalah

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{x+3}{4}$$

b. Pada bidang-xy, berarti $z = 0$.

Jadi $z = -3 + 4t = 0$.

Diperoleh, $t = \frac{3}{4}$.

Substitusi nilai t ke persamaan parameter x dan y, diperoleh $x = 2\frac{3}{4}$ dan $y = \frac{1}{4}$.

Jadi titik tembus di bidang-xy adalah

$$\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right).$$

Posisi antara Dua Garis

Diketahui dua garis

$$l_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

dan

$$l_2: \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

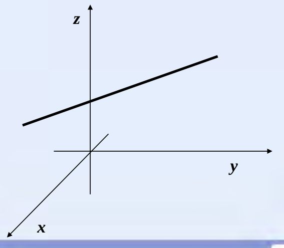
dengan $\overrightarrow{v_1} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ dan $\overrightarrow{v_2} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$

diperoleh 4 kemungkinan posisi antara 2 garis:

- **Berimpit**
- **Sejajar**
- **Berpotongan**
- **Bersilangan**

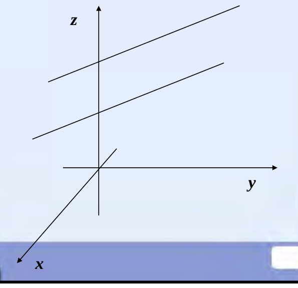
Berimpit

Garis-garis l_1 dan l_2 akan berimpit jika $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$ dan $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$.



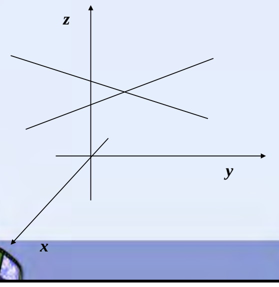
Sejajar

Garis-garis l_1 dan l_2 akan sejajar jika $\overrightarrow{v_1} = k\overrightarrow{v_2}$ dan $(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$.



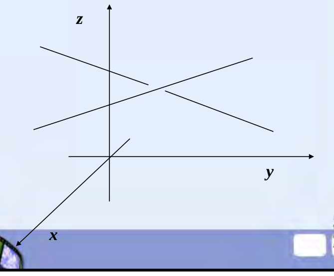
Berpotongan

Garis-garis l_1 dan l_2 akan berpotongan jika $\overrightarrow{v_1} \neq k\overrightarrow{v_2}$ dan sebidang.



Bersilangan

Garis-garis l_1 dan l_2 akan bersilangan jika $\overrightarrow{v_1} \neq k\overrightarrow{v_2}$ dan tidak sebidang.



Sudut antara Dua Garis

Rumus sudut antara dua garis

$$\boldsymbol{\theta} = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|}\right)$$

dengan

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \boldsymbol{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}$,

$\|\overrightarrow{v_1}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a_1})^2 + (\boldsymbol{b_1})^2 + (\boldsymbol{c_1})^2}$, dan

$\|\overrightarrow{v_2}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a_2})^2 + (\boldsymbol{b_2})^2 + (\boldsymbol{c_2})^2}$.

Titik Potong antara Dua Garis

Titik potong diperoleh dengan menyamakan dua persamaan garis

$$l_1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

dengan

$$l_2: \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

Jarak antara Dua Garis

Jarak antara garis l_1 dengan l_2 adalah

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}$$

dengan

$P_1: (x_1, y_1, z_1)$ adalah titik di l_1,

$P_2: (x_2, y_2, z_2)$ adalah titik di l_2, dan

$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$

$= \langle (a_2b_3 - a_3b_2), (a_3b_1 - a_1b_3), (a_1b_2 - a_2b_1) \rangle$.

Perpotongan antara Garis dengan Bidang

Titik potong antara garis dengan bidang seringkali disebut dengan titik tembus. Titik tembus tersebut dihitung dengan cara:

- ***masukkan $x = x_0 + ka$, $y = y_0 + kb$, dan $z = z_0 + kc$ ke persamaan bidang, sehingga diperoleh nilai k.***
- ***nilai k disubtitusikan lagi ke persamaan garis untuk mendapatkan titik tembus.***

Contoh

Bayangan titik (3,2,1) pada bidang $2x - y + 3z = 7$ adalah

a. (1, 2, 3)
b. (2, 3, 1)
c. (3, 2, 1)
d. (2, 1, 3)

Solusi:

Titik (3,2,1) dimasukkan pada bidang $2x - y + 3z = 7$ ternyata memenuhi persamaan. Sehingga titik (3,2,1) berada pada bidang $2x - y + 3z = 7$. Jadi bayangan titik (3,2,1) pada bidang $2x - y + 3z = 7$ adalah titik (3,2,1) itu sendiri.

Latihan

1. Jumlahan dari deret tak hingga berikut
$$6000 + \frac{6000}{1{,}01} + \frac{6000}{(1{,}01)^2} + \cdots$$
adalah ...
2. Pabrik *XYZ* memproduksi barang *A* mulai awal bulan Januari 2007 sebanyak 25.000 unit; Jika tiap bulan produk barang ini naik 5% dibandingkan produk bulan sebelumnya, maka jumlah seluruh produk selama tahun 2007 adalah ...

3. Persamaan bidang yang melalui titik (-1, 3, 2) dan tegak lurus dengan bidang-bidang $x + 2y + 2z = 5$ dan $3x + 3y + 2z = 8$ adalah
   a. $2x - 4y + 3z + 8 = 0$
   b. $2x + 4y + 3z + 8 = 0$
   c. $2x + 4y - 3z + 8 = 0$
   d. tidak ada satupun jawaban di atas yang benar.

4. Garis-garis lurus

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-11}{3}$$

dan

$$\frac{x}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{-2}$$

adalah

a. sejajar

b. berpotongan

c. bersilangan

d. saling tegak lurus

5. Apakah garis

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{11}$$

berada pada bidang $11x-3z-14=0$?

6. Jarak antara titik (0, 0, 0) dengan bayangan dari (1, 2, 3) dalam bidang $x-y+z=5$ adalah

a. $\sqrt{17}$ b. $\sqrt{29}$

c. $\sqrt{34}$ c. $\sqrt{41}$

7. Jarak terpendek antara garis-garis lurus

$$\frac{x-3}{-3}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

dan

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-6}{-4}$$

adalah

a. 30 b. $30\sqrt{3}$

c. $30\sqrt{30}$ d. tidak ada satupun jawaban di atas yang benar

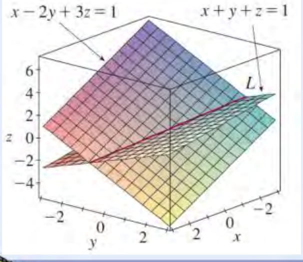
8. Tentukan titik perpotongan dari garis yang memiliki persamaan parameter

$$x=2+3t, y=-4t, z=5+t$$

dengan bidang

$$4x+5y-2z=18.$$

9. Tentukan persamaan simetris dari garis hasil perpotongan antara bidang $x+y+z=1$ dan $x-2y+3z=1$.



Untuk soal 10-13 berikut ini, tentukan apakah garis L_1 dan L_2 sejajar, bersilangan, atau berpotongan. Jika berpotongan tentukan titik potongnya

10. $L_1: x=-6t, y=1+9t, z=-3t$

$L_2: x=1+2s, y=4-3s, z=s$

11. $L_1: x=1+2t, y=3t, z=2-t$

$L_2: x=-1+s, y=4+s, z=1+3s$

12. $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$

$L_2: \frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$

13. $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$

$L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3}$

Untuk soal 14-20 berikut ini, tentukan persamaan bidang.

14. Bidang yang melalui titik asal dan sejajar dengan bidang $2x - y + 3z = 1$.
15. Bidang yang memuat garis $x = 3 + 2t, y = t, z = 8 - t$ dan sejajar dengan bidang $2x + 4y + 8z = 17$.
16. Bidang yang melalui titik (0, 1, 1), (1, 0, 1), dan (1, 1, 0).

17. Bidang yang melalui titik (6, 0, -2) dan memuat garis $x = 4 - 2t, y = 3 + 5t, z = 7 + 4t$.
18. Bidang yang melalui titik (1, -1, 1) dan memuat garis dengan persamaan simetris $x = 2y = 3z$.
19. Bidang yang melalui titik (-1, 2, 1) dan memuat garis perpotongan dengan bidang-bidang $x + y - z = 2$ dan $2x - y + 3z = 1$.
20. Bidang yang melalui garis perpotongan antara bidang-bidang $x - z = 1$ dan $y + 2z = 3$ dan tegak lurus dengan bidang $x + y - 2z = 1$.

Untuk soal 21-24 berikut ini, tentukan bidang-bidang sejajar, paralel, atau tidak satupun sejajar atau paralel. Jika tidak satupun sejajar atau paralel maka tentukan sudut antara mereka.

21. $x + y + z = 1, x - y + z = 1$
22. $2x - 3y + 4z = 5, x + 6y + 4z = 3$
23. $x = 4y - 2z, 8y = 1 + 2x + 4z$
24. $x + 2y + 2z = 1, 2x - y + 2z = 1$

Untuk soal 25-26 berikut ini, tentukan jarak ke bidang yang diberikan

25. $(2, 8, 5), x - 2y - 2z = 1$
26. $(3, -2, 7), 4x - 6y + z = 5$

Untuk soal 27-28 berikut ini, tentukan jarak ke bidang-bidang paralel yang diberikan

27. $z = x + 2y + 1, 3x + 6y - 3z = 4$
28. $3x + 6y - 9z = 4, x + 2y - 3z = 1$

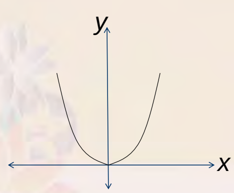
Bidang Kuadrik

Pertemuan 2

BIDANG KUADRATIK

Untuk menggambar bidang kuadratik di ruang dimensi 3 dengan baik, HARUS mengingat persamaan dan gambar kurva-kurva di **bidang** kartesius.

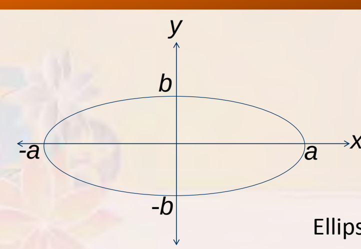
Beberapa kurva di Bidang (Dimensi 2) - 1



Parabola

$y = x^2$

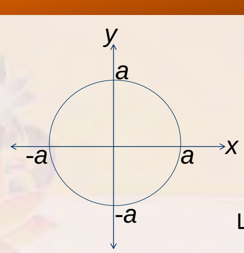
Beberapa kurva di Bidang (Dimensi 2) - 2



Ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

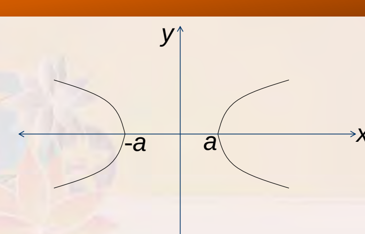
Beberapa kurva di Bidang (Dimensi 2) - 3



Lingkaran

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

Beberapa kurva di Bidang (Dimensi 2) - 4



Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pembagian Oktan

Oktan	x	y	z
I	+	+	+
II	-	+	+
III	-	-	+
IV	+	-	+
V	+	+	-
VI	-	+	-
VII	-	-	-
VIII	+	-	-

BIDANG KUADRIK

Bentuk Umum:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

dengan $A, B, \ldots, K$ konstanta.

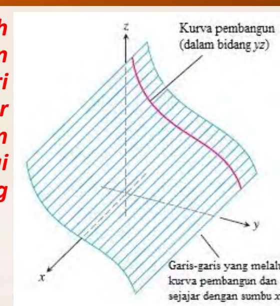
Macam-macam bidang kuadrik:

- Silinder
- Elipsoid
- Paraboloid
- Kerucut
- Hiperboloid

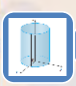
Persamaan	Sifat	Klasifikasi
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Tidak ada tanda minus	Elipsoid
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Satu tanda minus	Hiperboloid lembar satu
$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Dua tanda minus	Hiperboloid lembar dua
$z^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Tanpa suku linier	Kerucut eliptik
$z-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Satu suku linier; dua suku kuadrat dengan tanda sama	Paraboloid Eliptik
$z-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=0$	Satu suku linier; dua suku kuadrat yang berlawanan tanda	Paraboloid Hiperbolik

Silinder

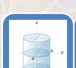
Silinder adalah suatu permukaan yang dibangun dari garis-garis sejajar yang ada dalam ruang dan melalui kurva pada bidang tertentu.



Macam-macam silinder

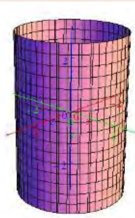

Silinder lingkaran; $x^2 + y^2 = a^2$

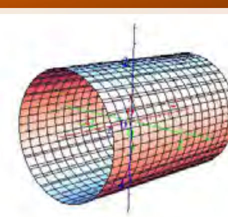

Silinder Parabolik; $y = x^2$


Silinder Eliptik; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$


Silinder Hiperbolik; $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Silinder Lingkaran - 1


$x^2 + y^2 = a^2$

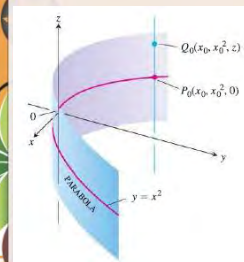

$y^2 + z^2 = a^2$

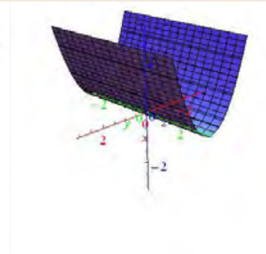
Silinder Lingkaran - 2

???

$x^2 + z^2 = a^2$

Silinder Parabolik - 1





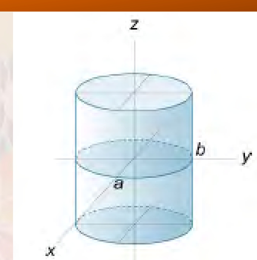
$y = x^2$ $\qquad$ $z = x^2$

Silinder Parabolik - 2

??? $\longleftarrow$

$x = y^2$
$z = y^2$
$x = z^2$
$y = z^2$

Silinder Eliptik - 1



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Silinder Eliptik - 2

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

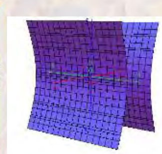
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

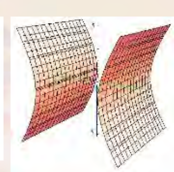
$\longrightarrow$???

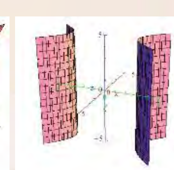
Silinder Hiperbolik

Hubungkan gambar dengan persamaan yang tepat !!!

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\qquad$ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$



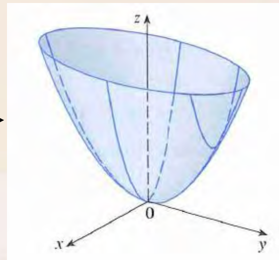




14

Paraboloid Eliptik - 1

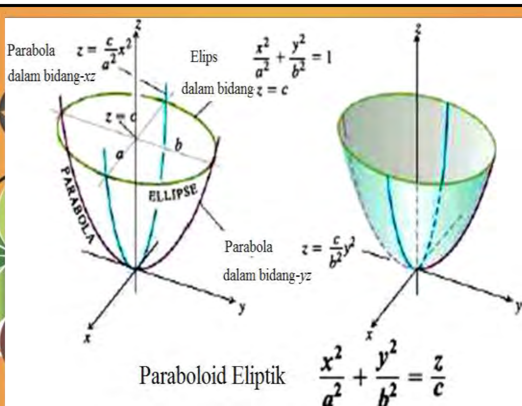
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \longrightarrow$$



Paraboloid Eliptik - 2

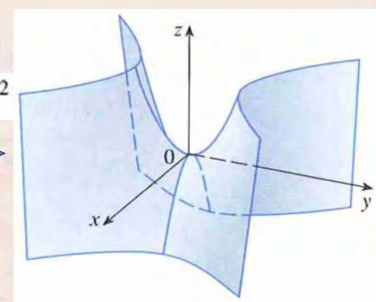
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a};$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b};$$
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c};$$
$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a};$$
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b}$$

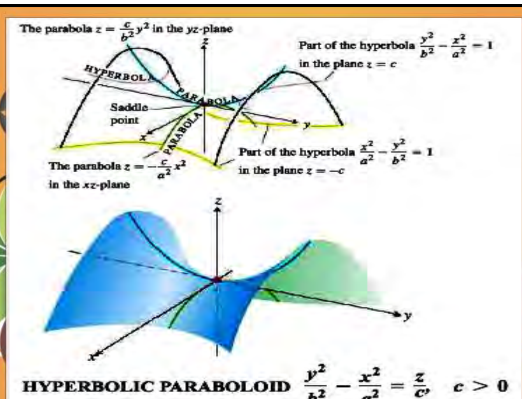
???



Paraboloid Hiperbolik

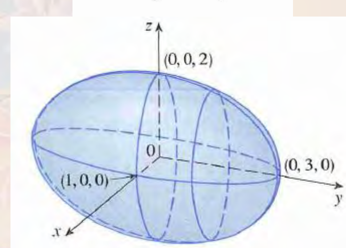
$$z = y^2 - x^2$$





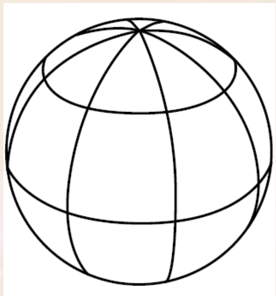
Elipsoid - 1

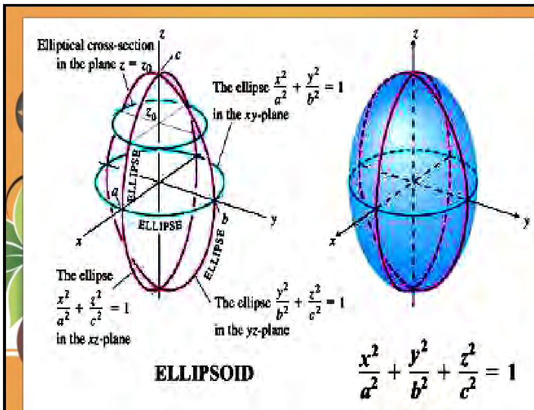
$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$



Elipsoid - 2

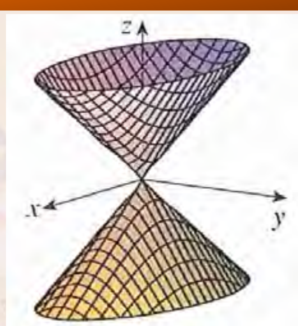
Bola adalah Elipsoida dengan $a = b = c$

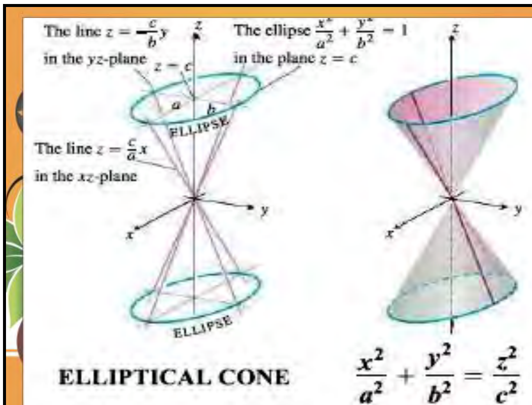




Kerucut eliptik

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

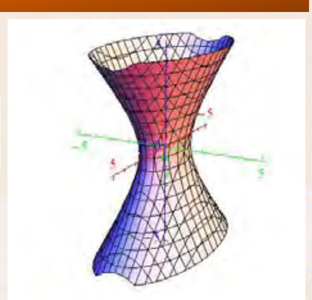


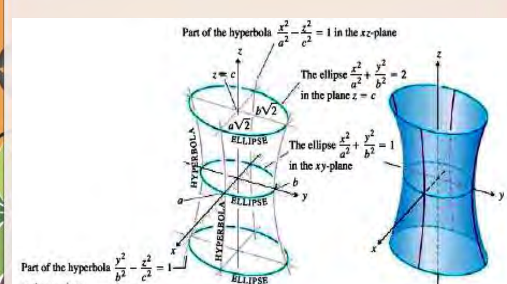


Hiperboloid

- Lembar 1

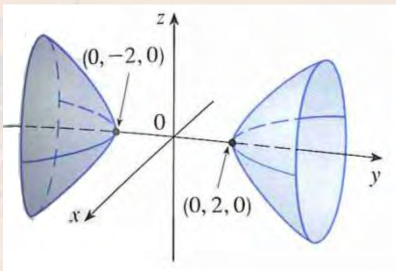
$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

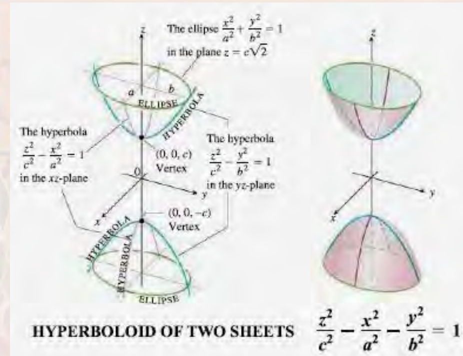




Hiperboloid

- Lembar 2 $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

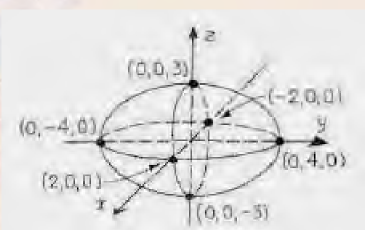




Contoh 1

Sketsa elipsoida berikut

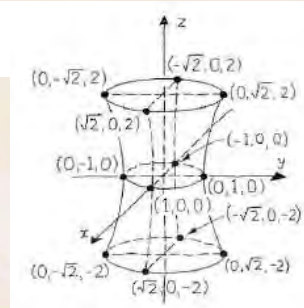
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$



Contoh 2

Sketsa hiperboloida lembar 1 berikut

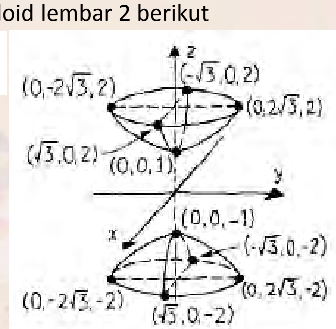
$$x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$$



Contoh 3

Sketsa hiperboloid lembar 2 berikut

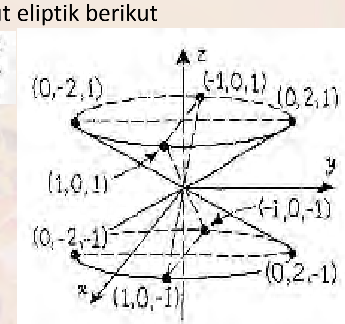
$$z^2-x^2-\frac{y^2}{4}=1$$



Contoh 4

Sketsa kerucut eliptik berikut

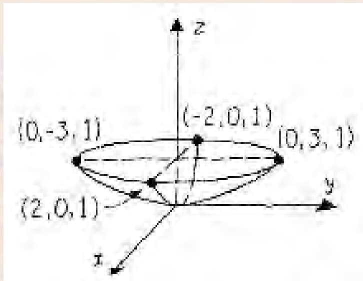
$$z^2=x^2+\frac{y^2}{4}$$



Contoh 5

Sketsa paraboloid eliptik berikut

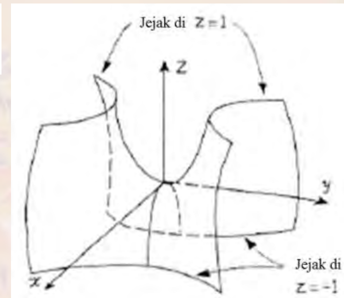
$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$



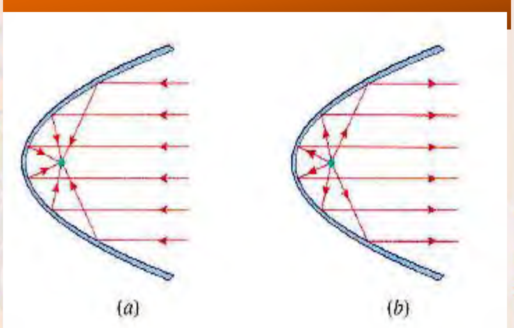
Contoh 6

Sketsa paraboloid hiperbolik berikut

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$$

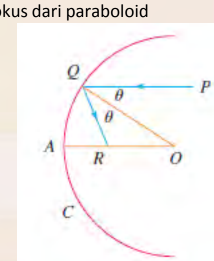


Aplikasi Permukaan Kuadrik

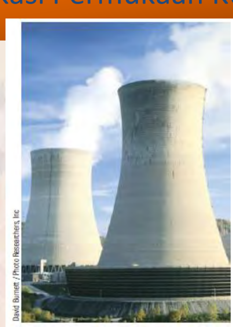


Aplikasi Permukaan Kuadrik

Sebuah piringan satelit yang memantulkan sinyal pada titik fokus dari paraboloid

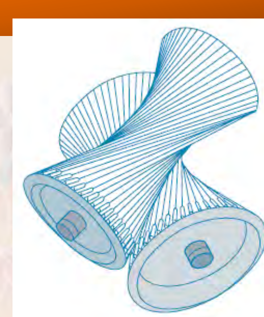


Aplikasi Permukaan Kuadrik



Reaktor mempunyai menara pendingin berbentuk hiperboloid

Aplikasi Permukaan Kuadrik

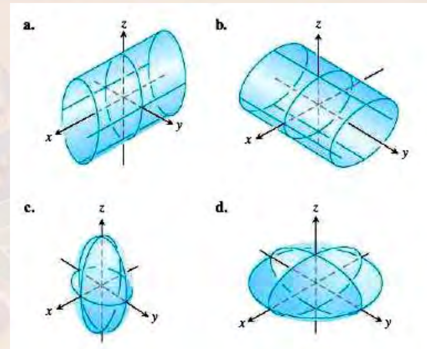


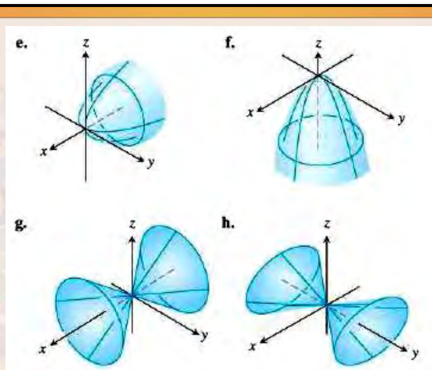
Hiperboloid menghasilkan transmisi gigi

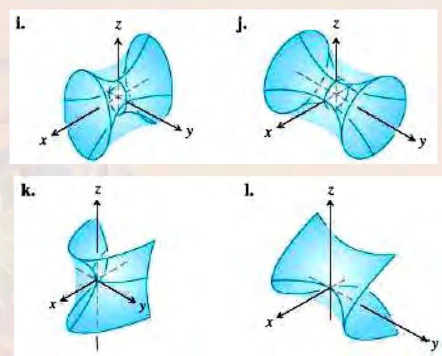
Latihan

Pasangkan persamaan-persamaan 1 s/d 12 di bawah ini dengan permukaan mereka (pada gambar (a) s/d (l) di slide berikutnya) dan identifikasi nama tipe permukaan kuadrik mereka.

1. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$	7. $x^2 + 2z^2 = 18$
2. $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$	8. $z^2 + x^2 - y^2 = 1$
3. $9y^2 + z^2 = 16$	9. $x = z^2 - y^2$
4. $y^2 + z^2 = x^2$	10. $z = -4x^2 - y^2$
5. $x = y^2 - z^2$	11. $x^2 + 4z^2 = y^2$
6. $x = -y^2 - z^2$	12. $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$



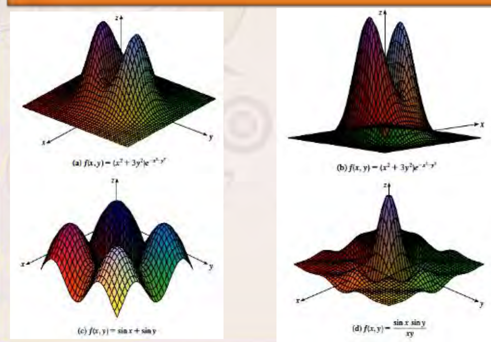




Pertemuan 3

- Turunan Parsial
- Turunan Parsial Fungsi Komposisi
- Diferensial Total
- Aturan Rantai Fungsi Komposisi

Beberapa Contoh Fungsi Dua Variabel



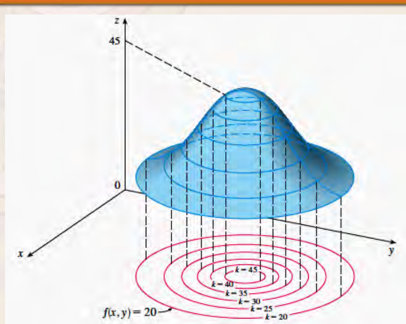
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

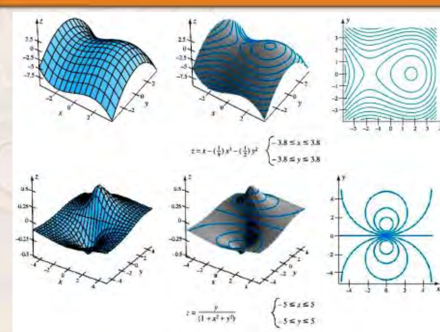
(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$

(d) $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$

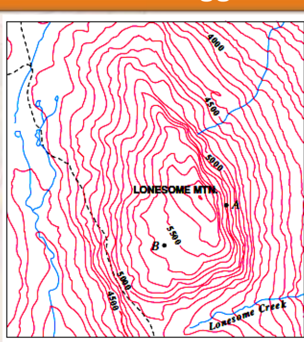
Kurva Ketinggian



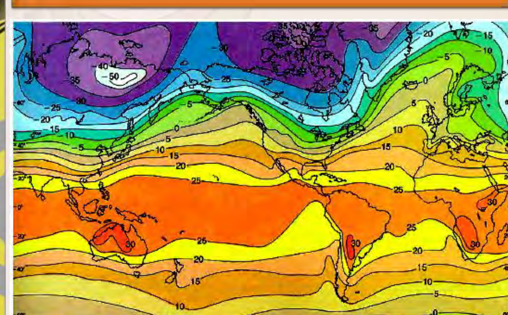
Kurva Ketinggian



Kurva Ketinggian



Kurva Ketinggian



Turunan Parsial

Untuk $z = f(x,y)$ **turunan parsial z terhadap** x **(**y **konstan)** didefinisikan sebagai :

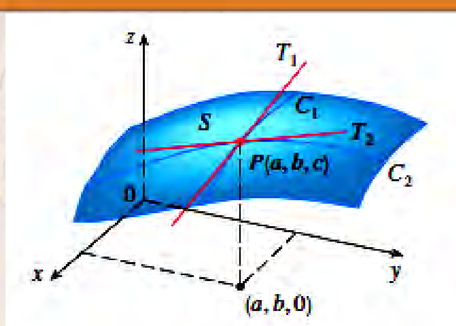
$$z_x = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Turunan Parsial

Untuk $z = f(x,y)$ **turunan parsial z terhadap** y **(**x **konstan)** didefinisikan sebagai :

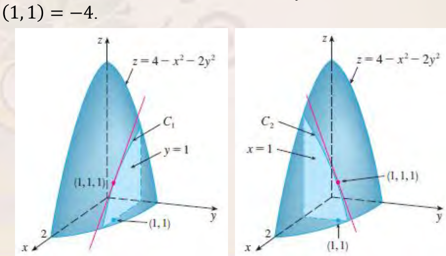
$$z_y = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Interpretasi Turunan Parsial - 1

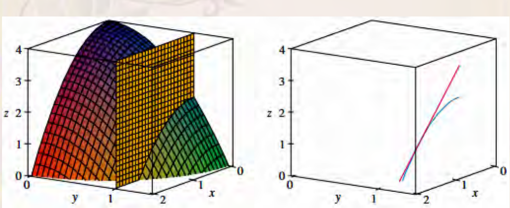


Interpretasi Turunan Parsial - 2

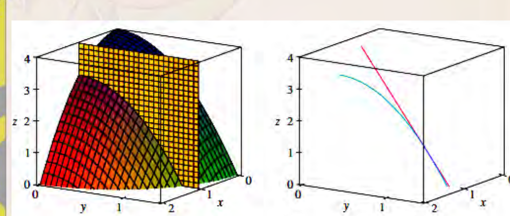
Jika $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ maka $f_x(1,1)$ dan $f_y(1,1)$ adalah $f_x(x,y) = -2x$ atau $f_x(1,1) = -2$ dan $f_y(x,y) = -4y$ atau $f_y(1,1) = -4$.



Interpretasi Turunan Parsial - 3



Interpretasi Turunan Parsial - 4



Contoh

Diketahui $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$. Tentukan turunan parsial f terhadap x dan terhadap y.

Solusi:

Turunan f terhadap x adalah $f_x(x, y) = 4x$.

Turunan f terhadap y adalah $f_y(x, y) = -3$.

Turunan Parsial Orde Tinggi

Seperti halnya turunan biasa, suatu fungsi multivariabel juga dapat dicari turunan parsial kedua, ketiga, dan seterusnya…

Diketahui $z = f(x, y)$.

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Turunan Parsial Orde Tinggi

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{1y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Contoh

Dapatkan semua turunan parsial pertama dan keempat turunan parsial kedua dari

$$z = x^4 + 2x^2 y - y^3.$$

Solusi:

Turunan parsial pertama f terhadap x adalah

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4xy.$$

Turunan parsial pertama f terhadap y adalah

$$f_y(x, y) = 2x^2 - 4y^3.$$

Turunan parsial kedua f_x terhadap x adalah

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y.$$

Turunan parsial kedua f_x terhadap y adalah

$$f_{xy}(x, y) = 4x.$$

Turunan parsial kedua f_y terhadap x adalah

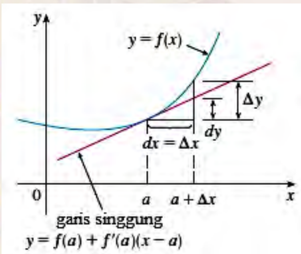
$$f_{yx}(x, y) = 4x.$$

Turunan parsial kedua f_y terhadap y adalah

$$f_{yy}(x, y) = -12y^2.$$

Diferensial Total

Fungsi satu variabel

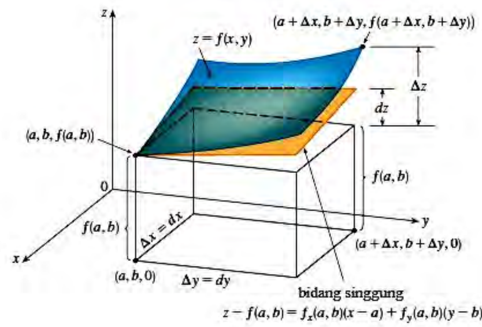


Diferensial dari y didefinisikan sebagai $dy = f'(x)dx$.

Δy menyatakan perubahan tinggi dari kurva $y = f(x)$.

dy menyatakan perubahan tinggi dari garis singgung saat x berubah sebesar $dx = \Delta x$.

Differensial Total



Differensial Total

Untuk $z = f(x, y)$, differensial total dari z didefinisikan sebagai :

$$\boldsymbol{dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}.$$

Diferensial total dapat diperluas untuk fungsi dengan lebih dari dua variabel bebas $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$, yaitu

$$\boldsymbol{du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}dx_3 + \cdots}$$

Contoh

Dapatkan differensial total dari $u = x^2 - y^2$.

Solusi:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 2xdx - 2ydy.$$

Contoh

a) Jika $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, tentukan dz.

b) Jika x berubah dari 2 ke 2,05 dan y berubah dari 3 ke 2,96, bandingkan nilai dz dengan Δz.

Solusi:

a) Dari definisi diferensial total

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$$

b) Dari yang diketahui $x = 2, dx = \Delta x = 0{,}05, y = 3,$ dan $dy = \Delta y = -0{,}04$, maka

$$\begin{aligned} dz &= \big(2(2) + 3(3)\big)(0{,}05) \\ &\quad + \big(3(2) - 2(3)\big)(-0{,}04) \\ &= 0{,}65 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(2{,}05, 2{,}96) - f(2, 3) \\ &= \big((2{,}05)^2 + 3(2{,}05)(2{,}96) - (2{,}96)^2\big) \\ &\quad -\big(2^2 + 3(2)(3) - 3^2\big) \\ &= 0{,}6449 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $dz \approx \Delta z$, tapi dz lebih mudah dihitung.

Aturan Rantai

Misal $z = f(x, y)$, sedangkan $x = g(t)$ dan $y = h(t)$, maka:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Misal $z = f(x, y)$, sedangkan $x = g(u, v)$ dan $y = h(u, v)$, maka:

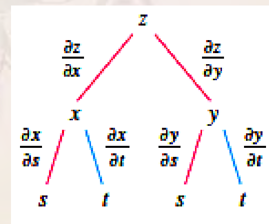
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

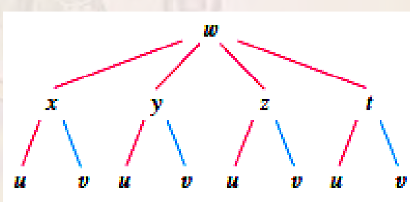
Bentuk Diagram Aturan Rantai-1

Fungsi $z = f(x,y)$,
dengan
$x = g(s,t)$ dan $y = h(s,t)$.



Bentuk Diagram Aturan Rantai-2

Fungsi $z = f(x,y,z,t)$,
dengan
$x = g(u,v)$, $y = h(u,u)$, $z = i(u,v)$, dan $t = j(u,v)$.



Contoh

Diketahui

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3,$$

dengan

$$x = g(u, v) = 3u - 2v$$

dan

$$y = g(u, v) = 2u + v.$$

Tentukan

$$\frac{\partial z}{\partial u} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Solusi:

Diperoleh,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= (3x^2)(3) + (3y^2)(2) \\ &= 9x^2 + 6y^2\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= (3x^2)(-2) + (3y^2)(1) \\ &= -6x^2 + 3y^2\end{aligned}$$

Contoh

Misalkan dalam suatu percobaan pengukuran sebuah tabung didapat alas tabung berdiameter $d = 6 \pm 0{,}03$ m dan tinggi tabung $h = 4 \pm 0{,}02$ m. Cari kesalahan mutlak, kesalahan relatif dan persentase kesalahan yang dilakukan dalam penghitungan volume tabung itu.

Solusi:

- $V = \pi r^2 h = 36\pi \text{ m}^3$.
- Kesalahan mutlak dari V adalah
$$dV = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh = 2\pi(3)(4)(0{,}015) + \pi(3)^2(0{,}02) = 0{,}54\pi \text{ m}^3.$$
- Kesalahan relatifnya
$$\frac{dV}{V} = \frac{0{,}54\pi}{36\pi} = 0{,}015$$
- Persentase kesalahan dari V adalah
$$\frac{dV}{V} \times 100\% = 0{,}015 \times 100\% = 1{,}5\%.$$

Latihan

Untuk soal 1 - 6 berikut ini, tentukan semua turunan parsial kedua.

1. $f(x,y) = x^3y^5 + 2x^4y$
2. $f(x,y) = \sin^2(mx + ny)$
3. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$
4. $v = \dfrac{xy}{x - y}$
5. $z = \arctan\dfrac{x + y}{1 - xy}$
6. $v = e^{xe^y}$

Untuk soal 7 - 10 berikut ini, tentukan turunan parsial yang diminta.

7. $f(x,y) = 3xy^4 + x^3y^2; f_{xxy}, f_{yyy}$
8. $f(x,t) = x^2e^{-t}; f_{ttt}, f_{txx}$
9. $f(x,y,z) = \cos(4x + 3y + 2z)\,; f_{xyz}, f_{yzz}$
10. $f(r,s,t) = r\ln(rs^2t^3)\,; f_{rss}, f_{rst}$
11. $u = e^{r\theta}\sin\theta\,; \dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial\theta}$
12. $z = u\sqrt{v - w}; \dfrac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$
13. $w = \frac{x}{y+2z}; \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$
14. $u = x^a y^b z^c; \dfrac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$

Untuk soal 15 - 20 di bawah ini, tentukan diferensial total dari

15. $z = x^3\ln(y^2)$
16. $m = p^5q^3$
17. $R = \alpha\beta^2\cos\gamma$
18. $v = y\cos xy$
19. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$
20. $w = xye^{xz}$

Untuk soal 21 - 24 di bawah ini, tentukan $\frac{dz}{dt}$ dengan menggunakan aturan rantai:

21. $z = x^2 + y^2 + xy, x = \sin t\,, y = e^t$
22. $z = \cos(x + 4y)\,, x = 5t^4, y = \dfrac{1}{t}$
23. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, x = \ln t\,, y = \cos t$
24. $z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), x = e^t, y = 1 - e^{-t}$

Untuk soal 25 - 28 di bawah ini, tentukan $\frac{\partial z}{\partial t}$ dan $\frac{\partial z}{\partial s}$ dengan menggunakan aturan rantai:

25. $z = x^2y^3, x = s\cos t\,, y = s\sin t$
26. $z = \arcsin(x - y)\,, x = s^2 + t^2, y = 1 - 2st$
27. $z = \sin\theta\cos\phi\,, \theta = st^2, \phi = s^2t$
28. $z = e^{x+2y}, x = \dfrac{s}{t}, y = \dfrac{t}{s}$

Untuk soal 29 - 30 di bawah ini, tentukan turunan parsial yang diberikan dengan menggunakan aturan rantai:

29. $z = x^2 + xy^3, x = uv^2 + w^3, y = u + ve^w;$
$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ dengan $u = 2, v = 1, w = 0$
30. $u = \sqrt{r^2 + s^2}, r = y + x\cos t\,, s = x + y\sin t\,;$
$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}$ dengan $x = 1, y = 2, t = 0$

Pertemuan 4

- Gradien
- Turunan Berarah
- Bidang Singgung
- Aplikasi Turunan Parsial

Gradien Fungsi Multivariabel

Misalkan $z = f(x, y)$ adalah sebuah fungsi multivariabel dalam x dan y sedemikian sehingga f_x dan f_y ada. ***Gradien dari f***, dinyatakan dengan $\nabla f(x, y)$, adalah vektor

$$\boldsymbol{\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\hat{\imath} + f_y(x, y)\hat{\jmath}}.$$

Notasi yang lain untuk gradien adalah **grad f**.

Contoh

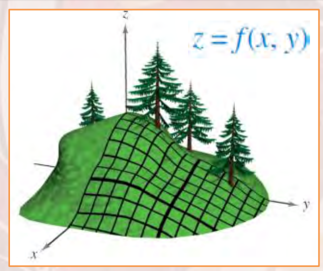
Tentukan gradien dari $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ pada titik (1, 2).

Solusi:

Gradien dari $f(x, y) = y \ln x + xy^2$, dinyatakan dengan $\nabla f(x, y)$, adalah vektor

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + x^2\right)\hat{\imath} + (\ln x + 2xy)\hat{\jmath}.$$

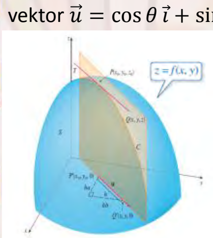
Turunan Berarah



Bagaimana menentukan kemiringan terhadap sumbu z?

Turunan Berarah

Misalkan $z = f(x, y)$ adalah sebuah permukaan dan titik $P_0(x_0, y_0)$ berada pada domain f (lihat gambar di bawah). Arah dari turunan berarah di berikan oleh vektor $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$,



dimana θ adalah sudut yang terbentuk antara vektor dengan sumbu x.

Turunan Berarah

Turunan berarah dari fungsi f dalam arah vektor $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ adalah

$$\boldsymbol{D_u f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta}$$

Bentuk lain rumus turunan berarah dari fungsi f dalam arah vektor $\vec{u}$ adalah

$$\boldsymbol{D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}}$$

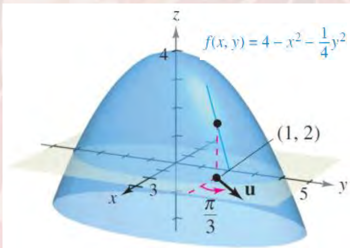
Contoh

Tentukan turunan berarah dari

$$f(x,y) = 4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 \text{ pada titik } (1,2)$$

dalam arah

$$\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{\jmath}\,.$$



Solusi:

Gradien dari $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$, adalah

$$\nabla f(x,y) = -2x\hat{\imath} - \frac{1}{2}y\hat{\jmath}.$$

Pada titik (1, 2) adalah

$$\nabla f(1,2) = -2\hat{\imath} - \hat{\jmath}.$$

Sehingga,

$$D_{\vec{u}}f(1,2) = \langle -2,-1\rangle \cdot \left\langle \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\rangle$$

$$= -1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Contoh

Diketahui paraboloida

$$z = f(x,y) = \tfrac{1}{4}(x^2 + 2y^2) + 2.$$

Misalkan P_0 adalah titik di (3,2) dan diketahui vektor-vektor normal $\hat{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ dan $\hat{v} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$.

a. Tentukan turunan berarah f pada P_0 dalam arah $\hat{u}$ dan $\hat{v}$.
b. Gambar grafik permukaan dan interprestasikan turunan-turunan berarahnya.

Solusi:

a. Turunan parsial dalam arah x dan y dari fungsi f adalah $f_x = \frac{x}{2}$ dan $f_y = y$. Sehingga $f_x(3,2) = \frac{3}{2}$ dan $f_y(3,2) = 2$. Turunan berarah dalam arah $\hat{u}$ dan $\hat{v}$ adalah

$$D_{\hat{u}}(3,2) = \langle f_x(3,2), f_y(3,2)\rangle \cdot \langle u_1, u_2\rangle$$

$$= \left\langle \frac{3}{2}, 2\right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle \approx 2{,}47.$$

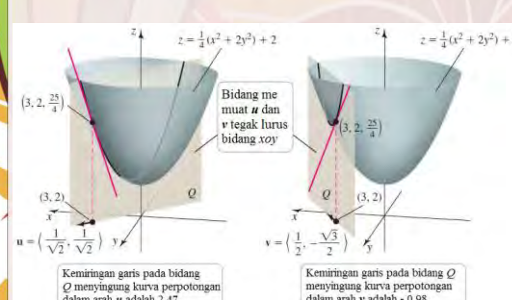
$$D_{\hat{v}}(3,2) = \langle f_x(3,2), f_y(3,2)\rangle \cdot \langle v_1, v_2\rangle$$

$$= \left\langle \frac{3}{2}, 2\right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle \approx -0{,}98.$$

b. Dalam arah $\hat{u}$, turunan berarah bernilai sekitar 2,47. Berarti kurva perpotongan akan naik pada (3,2) dalam arah ini. Secara ekuivalen, kemiringan garis singgung untuk kurva Q dalam arah $\hat{u}$ adalah sekitar 2,47.

Dalam arah $\hat{v}$, turunan berarah bernilai sekitar -0,98. Berarti kurva perpotongan akan turun pada (3,2) dalam arah ini. Secara ekuivalen, kemiringan garis singgung untuk kurva Q dalam arah $\hat{v}$ adalah sekitar -0,98.

Ilustrasi untuk kedua situasi di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Sifat Gradien dan Turunan Berarah

Misalkan fungsi f dapat didiferensialkan di titik (x, y).

1. Jika $\boldsymbol{\nabla f(x,y) = \vec{0}}$ **maka** $\boldsymbol{D_u f(x,y) = 0}$.
2. Arah kenaikan maksimum dari f diberikan oleh $\nabla f(x,y)$. **Nilai maksimum dari** $\boldsymbol{D_u f(x,y)}$ **adalah** $\boldsymbol{\|\nabla f(x,y)\|}$.
3. Arah kenaikan minimum dari f diberikan oleh $-\nabla f(x,y)$. **Nilai minimum dari** $\boldsymbol{D_u f(x,y)}$ **adalah** $\boldsymbol{-\|\nabla f(x,y)\|}$.

Contoh

Suhu pelat baja dalam derajat celcius adalah

$$T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

dengan x dan y dalam sentimeter. Tentukan vektor arah yang berasal dari titik (2, -3) yang mengakibatkan suhu meningkat secara cepat? Berapa laju peningkatan yang maksimum?

Solusi:

Gradien dari $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$, adalah

$$\nabla T(x,y) = -8x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath}.$$

Pada titik$(2, -3\,)$ adalah

$$\nabla T(2, -3\,) = -16\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}.$$

Arah kenaikan maksimum dari $T(x,y)$ di titik $(2, -3\,)$ adalah $\vec{u} = \nabla T(2, -3\,) = -16\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$.

Sehingga laju peningkatan maksimum dari $T(x,y)$ di titik $(2, -3\,)$ adalah

$$\|\nabla T(2, -3\,)\| = \sqrt{(-16)^2 + (6)^2} = \sqrt{292}.$$

Bidang Singgung

Misalkan F dapat didiferensialkan pada titik $P: (x_0, y_0, z_0)$ pada permukaan S yang diberikan oleh $F(x,y,z) = 0$ sehingga

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$$

1. **Bidang yang melalui** $\boldsymbol{P}$ **dengan vektor normal**nya adalah

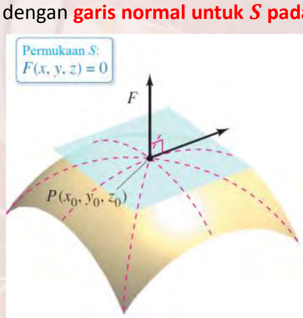
$$\boldsymbol{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}$$

disebut dengan **bidang singgung untuk** $\boldsymbol{S}$ **pada** $\boldsymbol{P}$.

2. Garis yang melalui P dengan vektor arahnya adalah

$$\boldsymbol{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}$$

disebut dengan **garis normal untuk** $\boldsymbol{S}$ **pada** $\boldsymbol{P}$.



Persamaan Bidang Singgung dan Garis Normal

Misalkan F dapat didiferensialkan pada titik $P: (x_0, y_0, z_0)$ maka

1. **Persamaan bidang singgung** pada permukaan S yang diberikan oleh $F(x,y,z) = 0$ pada (x_0, y_0, z_0) adalah

$$\boldsymbol{F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0)}$$
$$\boldsymbol{+F_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0}.$$

2. Persamaan garis normal (dalam bentuk simetrik) pada permukaan S yang diberikan oleh $F(x, y, z) = 0$ melewati (x_0, y_0, z_0) adalah

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Contoh

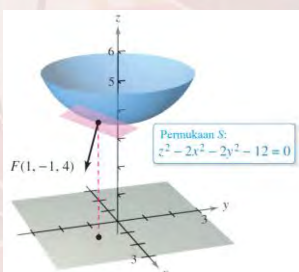
Tentukan persamaan bidang singgung untuk hiperboloid

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

pada titik $(1, -1, 4)$.

Solusi:

Gambar permukaan hiperboloid, bidang singgung, dan titik pada bidang singgung dapat dilihat pada gambar di bawah ini



Karena

$$F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$$

maka

$$F_x(x, y, z) = -4x,$$
$$F_y(x, y, z) = -4y,$$
$$F_z(x, y, z) = 2z$$

Jadi pada titik $(1, -1, 4)$ diperoleh

$$F_x(1, -1, 4) = -4,$$
$$F_y(1, -1, 4) = 4,$$
$$F_z(1, -1, 4) = 8.$$

Sehingga persamaan bidang singgung pada titik $(1, -1, 4)$ adalah

$$-4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) = 0$$

atau

$$x - y - 2z + 6 = 0$$

Nilai Maksimum dan Minimum - 1

Untuk $z = f(x, y)$ langkah-langkahnya adalah:

- ❖ Menentukan titik kritis (x_0, y_0) yang memenuhi
  $$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$
  atau
  $f_x(x_0, y_0)$ dan atau $f_y(x_0, y_0)$ tidak ada.
- ❖ Melakukan uji turunan kedua
  Misal
  $D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$
  dan $A = f_{xx}(x_0, y_0)$.

Nilai Maksimum dan Minimum - 2

$f(x_0, y_0)$ adalah :

- Nilai maksimum lokal jika $D > 0$ dan $A < 0$.
- Nilai minimum lokal jika $D > 0$ dan $A > 0$.
- Bukan suatu nilai ekstrim jika $D < 0$.
  (dalam kasus ini (x_0, y_0) adalah titik pelana)
- Tidak memberi kesimpulan jika $D = 0$.

Contoh

Tentukan jenis dan nilai ekstrim dari

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x.$$

Solusi:

Dua turunan pertama parsial dan disamakan dengan nol menghasilkan

$$f_x(x, y) = 2x - 4 = 0 \longrightarrow x_0 = 2$$

dan

$$f_y(x, y) = 8y = 0 \longrightarrow y_0 = 0.$$

Empat turunan kedua parsial diperoleh

$$f_{xx}(x, y) = 2, f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, f_{yy}(x, y) = 8.$$

Karena $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y)$ tidak bergantung pada x_0 dan y_0 maka

$$f_{xx}(2{,}0) = 2, f_{xy}(2{,}0) = f_{yx}(2{,}0) = 0, f_{yy}(2{,}0) = 8$$

Sehingga

$$\begin{aligned} D &= f_{xx}(2{,}0) f_{yy}(2{,}0) - \left(f_{xy}(2{,}0)\right)^2 \\ &= (2)(8) - (0)^2 \\ &= 16 > 0. \\ A &= f_{xx}(2{,}0) = 2 > 0 \end{aligned}$$

Jadi $f(2, 0)$ adalah nilai minimum.

Nilai $f(2, 0) = (2)^2 - 4(0)^2 - 4(2) = -4$.

Masalah Maksimum-Minimum

Langkah-langkah penyelesaian:

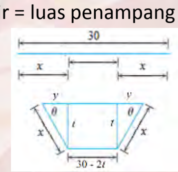
- Tentukan persamaan yang menghubungkan variabel-variabel dalam masalah tersebut.
- Tentukan nilai maksimum dan atau nilai minimumnya dengan cara yang sama seperti pada pembahasan sebelumnya.

Contoh - 1

Akan dibuat saluran air terbuat dari bahan logam dengan lebar 30 cm. Bahan ini dibengkokkan sisi-sisinya sehingga penampangnya simetris seperti pada gambar berikut. Berapa sudut dan lebar alas saluran air itu agar kapasitas alirannya maksimum? (kapasitas aliran air berbanding lurus dengan luas penampang alirannya)

Solusi:

Kapasitas aliran air = luas penampang saluran air



$$L = (30 - 2x)t + 2\left(\frac{1}{2}yt\right) = [(30 - 2x) + y]t$$

$$\begin{aligned} &= [30 - 2x + x\cos\theta\ ]x\sin\theta \\ &= (30 - 2x)x\sin\theta + x^2\cos\theta\sin\theta \\ &= (30 - 2x)x\sin\theta + \tfrac{1}{2}x^2\sin 2\theta \end{aligned}$$

- Untuk menentukan kapasitas maximum ditentukan terlebih dahulu titik kritis fungsi di atas.

$$L_x = (30 - 4x)\sin\theta + x\sin 2\theta = 0$$
$$L_\theta = (30 - 2x)x\cos\theta + 2x\cos 2\theta = 0$$

- Dengan menyelesaikan kedua persamaan tersebut diperoleh $\theta = 60^0$ dan x = 10 cm, sehingga lebar alas saluran air juga 10 cm.

Latihan

Untuk soal 1 - 4 di bawah ini, tentukan turunan berarah dari fungsi pada titik P dalam arah vektor satuan $\hat{u} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2, P(1,-2), \theta = \frac{\pi}{4}$
2. $f(x,y) = \frac{x}{x+y}, P(3,0), \theta = -\frac{\pi}{6}$
3. $f(x,y) = \sin(2x+y)\,, P(0,0), \theta = \frac{\pi}{3}$
4. $g(x,y) = xe^y, P(0,2), \theta = \frac{2\pi}{3}$

Untuk soal 5 - 8 di bawah ini, tentukan turunan berarah dari fungsi pada titik P dalam arah vektor satuan $\hat{v}$.

5. $f(x,y) = 3x - 4xy + 9y, P(1,2), \vec{v} = \frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath}$
6. $f(x,y) = x^3 + y^3, P(4,3), \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$
7. $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, P(3,4), \vec{v} = 3\,\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$
8. $h(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, P(0,0), \vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$

Untuk soal 11 - 16 di bawah ini, tentukan gradien dari fungsi pada titik yang diberikan.

11. $f(x,y) = 3x + 5y^2 + 1,\quad (2,1)$
12. $g(x,y) = 2xe^{\frac{y}{x}},\quad (2,0)$
13. $z = \ln(x^2 - y),\ (2,0)$
14. $z = \cos(x^2 + y^2)\,,\quad (3,-4)$
15. $w = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2,\quad (1,1,-2)$
16. $w = x\tan(y+z),\ (4,3,-1)$

Untuk soal 17 - 22 di bawah ini, tentukan gradien dari fungsi dan nilai maksimum dari turunan berarah pada titik yang diberikan.

17. $f(x,y) = x^2 + 2xy,\quad (1,0)$
18. $f(x,y) = \frac{x+y}{y+1},\quad (0,1)$
19. $h(x,y) = x\tan y,\ \left(2,\frac{\pi}{4}\right)$
20. $h(x,y) = y\cos(x-y)\,,\quad \left(0,\frac{\pi}{3}\right)$
21. $g(x,y) = ye^{-x},\quad (0,5)$
22. $g(x,y) = \ln\sqrt[3]{x^2+y^2}\,,\quad (1,2)$

Untuk soal 23 - 38 di bawah ini, tentukan nilai ekstrim dan jenisnya dari

23. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$
24. $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$
25. $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$
26. $f(x,y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$
27. $f(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$
28. $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$
29. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$
30. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$

31. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$

32. $f(x,y) = x^2 + 2xy$

33. $f(x,y) = \sqrt{56x^2 - 8y^2 - 16x - 31} + 1 - 8x$

34. $f(x,y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

35. $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

36. $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

37. $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

38. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

Pertemuan 5

- Aplikasi turunan dengan menggunakan pengali Lagrange
- Integral Rangkap 2

Masalah Maksimum-Minimum dengan Kendala - 1

Langkah-langkah penyelesaian dengan substitusi:

- Tentukan fungsi utama (fungsi yang akan dicari nilai maksimum-minimumnya) dan fungsi kendala dari permasalahan tersebut.
- Substitusikan fungsi kendala ke fungsi utama.
- Tentukan nilai maksimum-minimum dari fungsi utama yang telah disubstitusi dengan fungsi kendala dengan langkah-langkah seperti pada pembahasan sebelumnya.

Masalah Maksimum-Minimum dengan Kendala - 2

Langkah-langkah penyelesaian dengan pengali Lagrange:

- Tentukan fungsi utama $f(x,y,z)$ dan fungsi kendala $g(x,y,z)=0$ dari permasalahan tersebut.
- Buat fungsi $G(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$ dengan λ adalah variabel baru yang disebut pengali Lagrange.
- Tentukan nilai maksimum-minimum dari fungsi G dengan langkah-langkah seperti pada pembahasan sebelumnya.

Contoh

Tentukan tiga bilangan positif yang hasil kalinya maksimum jika diketahui jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 120.

Solusi:

Fungsi utama $f(x,y,z)=xyz$,
Fungsi kendala $x+y+z=120$

Cara 1

- Substitusikan fungsi kendala ke fungsi utama sehingga menjadi

$$f(x,y)=xy(120-x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=120y-2xy-y^2=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=120x-2xy-x^2=0$$

- Dengan menyelesaikan persamaan $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ diperoleh $x=y=40$, sehingga $z=40$.

Cara 2

- Bentuk fungsi
$$G(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(120-x-y-z)$$
- Keempat turunan parsial pertama dari G adalah
  - $G_x=yz-\lambda=0$
  - $G_y=xz-\lambda=0$
  - $G_z=xy-\lambda=0$
  - $G_\lambda=120-x-y-z=0$
- Dengan menyelesaikan keempat persamaan tersebut diperoleh $x=y=z=40$

Integral Multivariabel

Integral Rangkap Dua

Untuk menyelesaikan

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

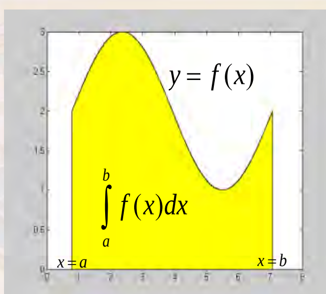
perlu diperhatikan beberapa hal-hal berikut ini :

- Dikerjakan berurutan mulai dari integral yang paling dalam kemudian ke luar.
- Jika diintegrasikan terhadap suatu variabel tertentu maka variabel lainnya dianggap konstan.

Arti Geometri Integral Rangkap Satu

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

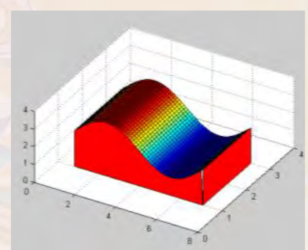
= luas bidang datar di bawah kurva $y = f(x)$, di atas sumbu x, di antara garis $x = a$ sampai $x = b$.

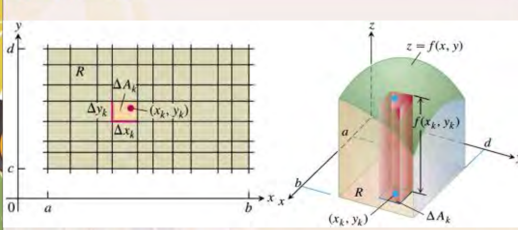


Arti Geometri Integral Rangkap Dua

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

= volume benda yang dibatasi oleh suatu permukaan dan luasan di bidang XOY.

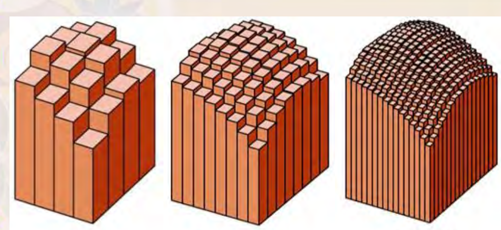




$$\text{Volume} = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x,y)\,dA,$$

dimana $\Delta A_k \to 0$ ketika $n \to \infty$.

Ketika *n* menuju tak hingga.........

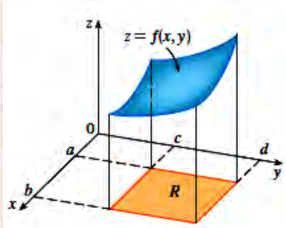


(a) $n = 16$ (b) $n = 64$ (c) $n = 256$

Integral Rangkap Dua dengan Batas-batas Konstan

$\iint_R f(x,y)dA$

= berarti menghitung volume benda padatan yang berada di atas daerah R dan di bawah kurva $f(x,y)$, dengan



$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$

Contoh

Hitung

$$\iint_R f(x,y)dA$$

untuk

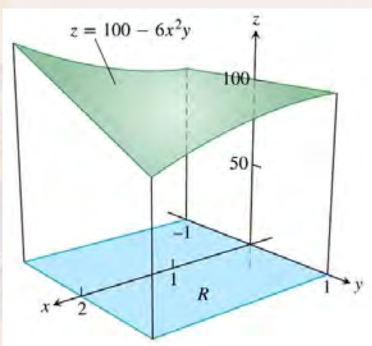
$$f(x,y) = 100 - 6x^2y$$

dan

$$R: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1.$$

Solusi:

Grafik fungsi $f(x,y)$ dengan integrasinya dapat dilihat pada gambar di samping.



Integrasi terhadap *x* dan diikuti terhadap *y* menghasilkan:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(100 - 6x^2y)dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}[100x - 2x^3y]_{x=0}^{x=2}\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}(200 - 16y)\,dy$$

$$= [200y - 8y^2]_{y=-1}^{y=1} = 400$$

Dengan merubah urutan integrasi diperoleh hasil yang sama yaitu:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{0}^{2}\int_{-1}^{1}(100 - 6x^2y)dydx$$

$$= \int_{0}^{2}[100y - 3x^2y^2]_{y=-1}^{y=1}\,dx$$

$$= \int_{0}^{2}[(100 - 3x^2) - (-100 - 3x^2)]\,dx$$

$$= \int_{0}^{2}200\,dx = 400$$

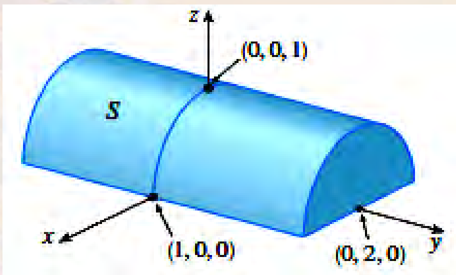
Contoh

Jika $R = \{(x,y) | -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$ hitung integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\,dA$$

Solusi:

Kurva permukaan fungsi yang diintegrasikan dapat dilihat pada gambar di bawah.

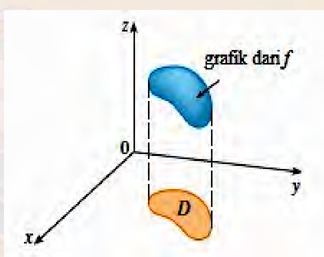


Volumenya adalah

$$\iint_R \sqrt{1-x^2}\,dA = \frac{1}{2}\pi(1)^2 \cdot 4 = 2\pi.$$

Integral Rangkap Dua Sepanjang Daerah yang Umum

Batas-batas integral sebelah dalam masih boleh merupakan suatu fungsi dari variabel yang berada diluarnya, sedangkan batas-batas integral yang paling luar harus berupa konstanta.

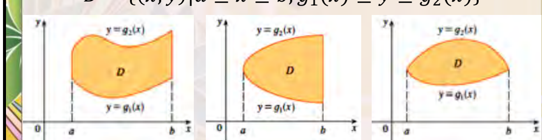


Daerah D dengan batas x Konstan

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

dengan

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

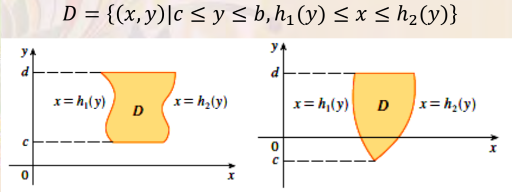


Daerah D dengan batas y Konstan

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

dengan

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le b, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$



Contoh

Hitung

$$\iint_D (x+2y)\,dA,$$

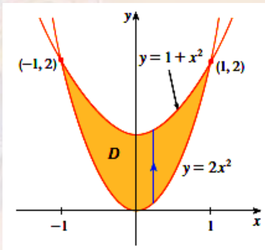
dimana D adalah daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 2x^2$ dan $y = 1 + x^2$.

Solusi:

Daerah D memiliki batas x konstan di -1 dan 1 yaitu

$$D = \{(x,y) | -1 \le x \le 1, 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$$

Gambar daerah D terlihat pada gambar di bawah ini



$$\iint_D (x+2y)dA$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)dydx$$

$$= \int_{-1}^{1} [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1+x^2) + (2x^2)^2 - x(1+x^2) - (2x^2)^2]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx$$

$$= \left[\frac{-3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= 0{,}233$$

Sifat-sifat integral rangkap

1. $\iint_A kf(x,y)dA = k \iint_A f(x,y)dA$

2. $\iint_A (f(x,y) \pm g(x,y))dA$

$$= \iint_A f(x,y)dA \pm \iint_A g(x,y)dA$$

Jika batas-batas integrasi untuk masing-masing integrator adalah konstanta dan integrannya yaitu $f(x,y) = g(x) \,.\, h(y)$ maka berlaku

3. $\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dA = \int_{x=a}^{x=b} g(x)dx \times \int_{y=c}^{y=d} h(y)dy$

4. $\iint_{A=A_1 \cup A_2} f(x,y)\, dA = \iint_{A_1} f(x,y)dA + \iint_{A_2} f(x,y)dA$

(tanda gabungan $\cup$ pada batas integrasi mengantisipasi overlapping luasan A_1 dan A_2.)

Merubah urutan integrasi

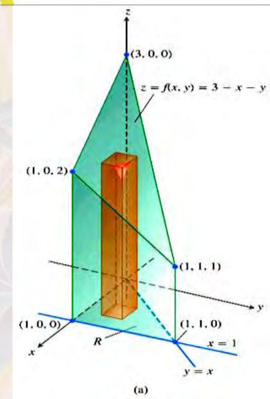
- Terkadang perlu atau menjadi lebih mudah untuk menyelesaikan integral rangkap dengan merubah urutan integrasinya.
- Pada saat merubah urutan integrasi, pastikan bahwa luasan yang menjadi batas integrasinya tidak berubah.
- Caranya dengan mensketsa terlebih dahulu luasan tersebut, lalu tentukan batas integrasi sesuai urutannya.

Contoh

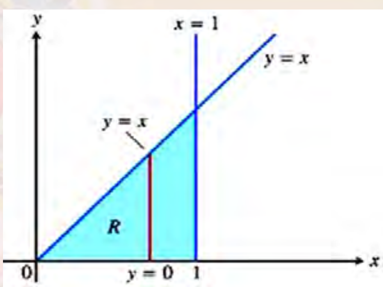
Hitung volume dari prisma yang alasnya berbentuk segitiga. Alas segitiga di bidang *XOY* dibatasi oleh sumbu-*x*, garis *y* = *x*, dan garis *x* = 1. Atap prisma terletak pada bidang

$$z = f(x, y) = 3 - x - y.$$

Solusi:



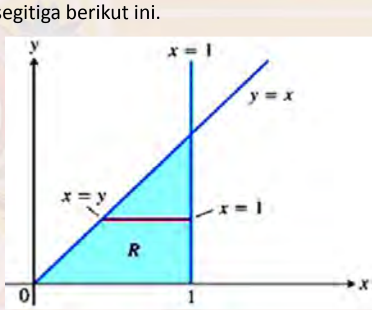
Menyelesaikan integral di atas dengan membuat urutan integrasi *dydx* (daerah *D* dengan *x* konstan).
Lihat segitiga berikut ini.



Diperoleh

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 1. \end{aligned}$$

Menyelesaikan integral di atas dengan membuat urutan integrasi *dxdy* (daerah *D* dengan *y* konstan).
Lihat segitiga berikut ini.



Diperoleh,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2} y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{5}{2} y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1. \end{aligned}$$

Contoh

- Perhatikan integral berikut

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos x^2 \, dxdy$$

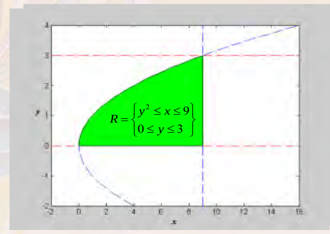
- Integral ini tidak dapat diselesaikan dengan urutan seperti yang diminta.
- Coba ubah urutan integrasinya.

Solusi:

Batas integral tersebut adalah daerah

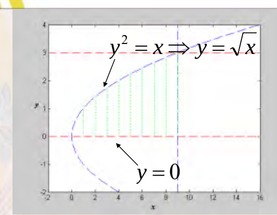
$$R = \{(x, y)|y^2 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 3\}$$

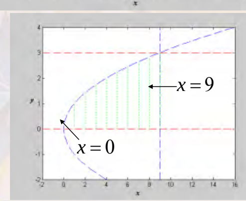
Sketsa daerah R adalah



Ubah urutan integrasinya sehingga y menjadi variabel integrasi bagian dalam.

1. buat pias sejajar sumbu y,
2. tentukan batas untuk y (seperti terlihat pada gambar bagian kiri),
3. kemudian tentukan juga batas untuk x (seperti terlihat pada gambar bagian kanan).





Sehingga integralnya menjadi:

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos x^2 \, dxdy = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} y \cos x^2 \, dydx$$

$$= \int_0^9 \left[\frac{y^2}{2} \cos x^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^9 \frac{x}{2} \cos x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{\sin x^2}{4} \right]_0^9$$

$$= \frac{\sin 81}{4}$$

Latihan

1. Tentukan titik pada bidang $x + 2y + 3z = 13$ yang paling dekat dari titik (1,1,1).
2. Tentukan titik pada permukaan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ yang paling jauh dari titik (1,-1,1).
3. Tentukan jarak minimum dari permukaan $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ ke titik (0,0,0).
4. Tentukan titik pada permukaan $z = xy + 1$ yang paling dekat ke titik (0,0,0).
5. Tentukan titik pada permukaan $z^2 = xy + 4$ yang paling dekat ke titik (0,0,0).

6. Tentukan titik-titik pada permukaan $xyz = 1$ yang paling dekat dengan titik (1,1,1).

7. Hitung

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y^2} xy\,dx\,dy$$

8. Diberikan

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} (x + 2y)\,dy\,dx$$

a. Gambar daerah integrasi

b. Ubah urutan integrasi

c. Hitung I

Untuk soal 9 - 14 berikut ini, sketsa daerah R dan hitung integral $\iint_R f(x,y)\,dA$.

9. $$\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\,dy\,dx$$

10. $$\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 y\,dy\,dx$$

11. $$\int_0^6 \int_{\frac{y}{2}}^3 (x + y)\,dx\,dy$$

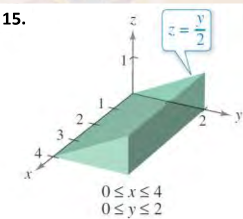
12. $$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x^2 y^2\,dx\,dy$$

13. $$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y)\,dy\,dx$$

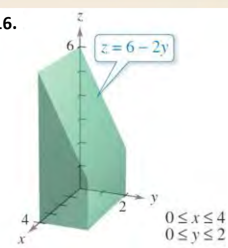
14. $$\int_0^1 \int_{y-1}^{0} e^{x+y}\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^{y-1} e^{x+y}\,dx\,dy$$

Untuk soal 15 - 20 berikut ini, gunakan integral lipat 2 untuk menghitung volume benda padatan yang diberikan.

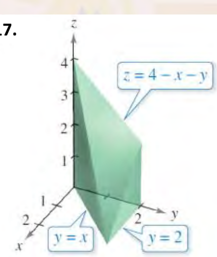
15.



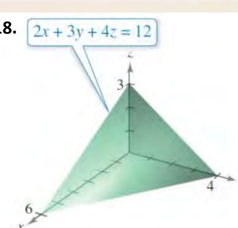
16.



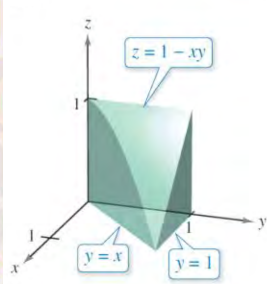
17.



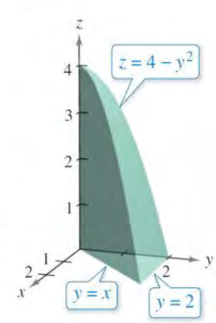
18.



19.

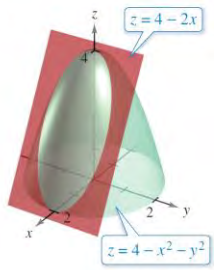


20.

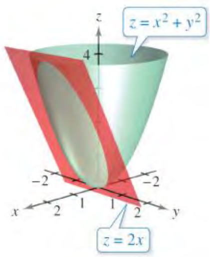


Untuk soal 21 - 26 berikut ini, buat integral lipat 2 untuk menghitung volume benda padatan yang dibatasi oleh dua permukaan. Untuk setiap rumus integral lipat dua yang dihasilkan tidak perlu dihitung.

21.



22.



23. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$

24. $z = \sin^2 x, z = 0, 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 5$

25. $z = x^2 + 2y^2, z = 4y$

26. $z = x^2 + y^2, z = 18 - x^2 - y^2$

Untuk soal 27 - 32 berikut ini, sketsa daerah integrasi, hitung integral yang diberikan, dan rubah urutan integrasi jika diperlukan

27. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dxdy$

28. $\displaystyle\int_0^{\ln 10} \int_{e^2}^{10} \frac{1}{\ln y} dydx$

29. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dydx$

30. $\displaystyle\int_0^3 \int_{\frac{y}{3}}^{1} \frac{1}{1+x^4} dxdy$

31. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \sin x \sqrt{1+\sin^2 x}\, dxdy$

32. $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{2} \sqrt{y} \cos y\, dydx$

Pertemuan 6

- Koordinat polar
- Integral Lipat 2 dalam Sistim Koordinat Polar
- Aplikasi Integral Lipat 2
- Integral lipat 3

Sistem Koordinat Polar

Hal yang perlu diperhatikan :

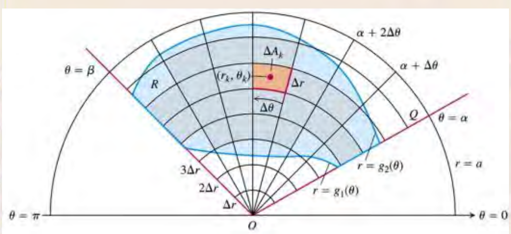
- Transformasi differensial integrator :

  ***dydx* diganti dengan $rdrd\theta$**

- Transformasi *integran*:

  $x = r\cos\theta \, , y = r\sin\theta \, .$

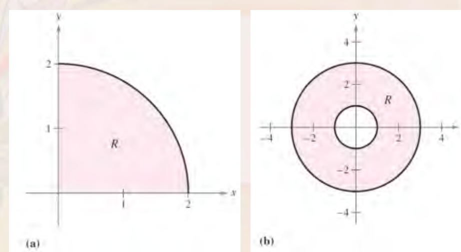
- Penyesuaian *batas-batas integrasi* : cara yang termudah adalah dengan melihat gambarnya.



Daerah R: $g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ terdapat dalam daerah berbentuk kipas Q: $0 \le r \le a, \alpha \le \theta \le \beta$.

Contoh

Gunakan sistem koordinat polar untuk menyatakan daerah pada gambar berikut ini.



Solusi:

a. Daerah pada berbentuk ¼ cakram dengan jari-jari 2. Dalam sistem koordinat polar daerah tersebut adalah

$$R = \left\{(r, \theta) | 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}.$$

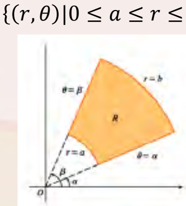
a. Daerah R berada di antara dua lingkaran yang sepusat dengan masing-masing berjari-jari 3 dan 1. Dalam sistem koordinat polar daerah tersebut adalah

$$R = \{(r, \theta) | 1 \le r \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Integral Rangkap Dua Dalam Sistem Koordinat Polar

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta \, , r\sin\theta) r dr d\theta$$

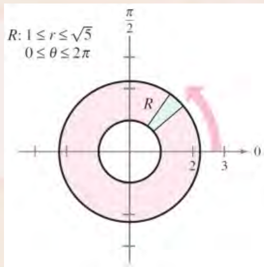
R diberikan oleh $\{(r, \theta) | 0 \le a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$



Contoh

Misalkan R adalah daerah yang berada di antara dua lingkaran kosentris $x^2+y^2=1$ dan $x^2+y^2=5$. Hitung integral

$$\iint_R (x^2+y)\,dA.$$



Solusi:

Daerah dalam gambar soal dalam sistem koordinat polar adalah

$$R=\{(r,\theta)|1\le r\le\sqrt{5}, 0\le\theta\le 2\pi\}.$$

Sehingga,

$$\iint_R (x^2+y)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}}(r^2\cos^2\theta+r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta+\frac{r^3}{3}\sin\theta\right)_1^{\sqrt{5}}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(3+3\cos 3\theta+\frac{5\sqrt{5}-1}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

$$=2\pi.$$

Contoh

Hitung volume benda padatan yang dibatasi di atas oleh paraboloida

$$z=9-x^2-y^2$$

dan di bawah oleh lingkaran berjari-jari 1 pada

bidang *XOY*.

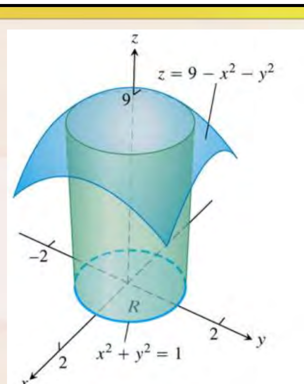
Solusi:

Gambar benda padatan pada soal adalah gambar di samping.

Daerah integrasi adalah konstan

$$0\le r\le 1,$$

$$0\le\theta\le 2\pi$$



Sehingga,

$$\iint_R (9-x^2-y^2)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(9-r^2)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)_{r=0}^{r=1}d\theta$$

$$=\frac{17}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{17\pi}{2}.$$

Aplikasi Integral Rangkap Dua - 1

Diketahui suatu plat tipis yang demikian tipisnya sehingga dapat dipandang berdimensi dua berada di bidang-*XOY* dengan luas *A*.

Andaikan kerapatan/densitasnya (massa per satuan luas) dinyatakan oleh $\delta(x,y)$, elemen luas *dxdy* memiliki massa sebesar $dm = \delta(x,y)\, dx\, dy$.

Aplikasi Integral Rangkap Dua - 2

- Massa plat tipis $m = \iint_A \delta(x,y)dxdy$
- Momen
  - Momen total (momen pertama) terhadap sumbu *y*

$$M_y = \iint_A x\delta(x,y)dxdy$$

  - Momen total (momen pertama) terhadap sumbu *x*

$$M_x = \iint_A y\delta(x,y)dxdy$$

- Pusat massa (titik berat) plat:

$$x_p = \frac{M_y}{m}, y_p = \frac{M_x}{m}$$

Integral Rangkap Tiga

Definisi integral rangkap tiga dari $f(x,y,z)$ atas suatu ruang tertutup *D* adalah :

$$\iiint_D f(x,y,z)dV$$

Secara geometri kita hanya bisa manggambar ruang *D*, sedangkan grafik fungsi $f(x,y,z)$ tidak dapat digambar karena untuk itu diperlukan empat dimensi.

Integral rangkap tiga mempunyai sifat-sifat dan teknik integrasi yang sama dengan integral rangkap dua.

Integral Rangkap Tiga dengan Domain Beraturan

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

dengan domain berbentuk kotak persegi panjang

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$$

Integral Rangkap Tiga dengan Domain Lebih Umum

Proyeksi *E* pada bidang *XOY*

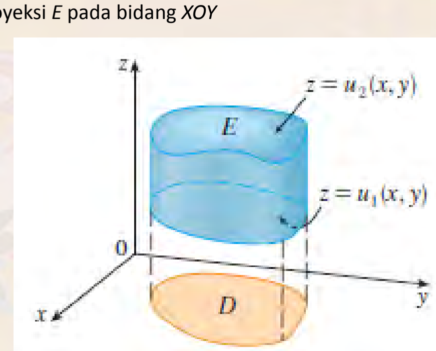
$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

dengan domain *E* adalah

$$E = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

dan *D* adalah proyeksi dari *E* pada bidang *XOY*.

Proyeksi *E* pada bidang *XOY*

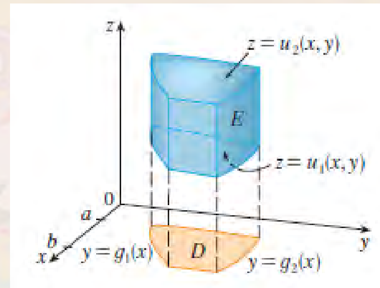


Jika bidang *D* diasumsikan memiliki batas *x* konstan maka

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

dengan domain *E* adalah

$$E = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x), u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

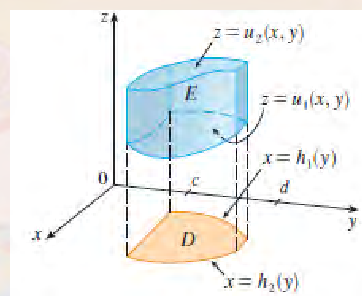


Jika bidang *D* diasumsikan memiliki batas *y* konstan maka

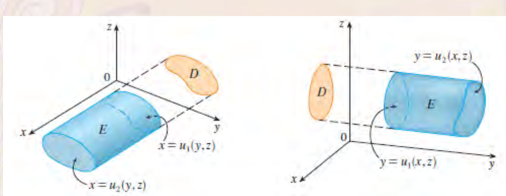
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

dengan domain *E* adalah

$$E = \{(x,y,z) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y), u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$



Proyeksi *E* pada bidang *XOZ* atau *YOZ*



Dengan bentuk integral masing-masing

Proyeksi *E* pada bidang *YOZ*.

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right] dA$$

dengan

$$E = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D, u_1(y,z) \le x \le u_2(y,z)\}$$

Proyeksi *E* pada bidang *XOZ*.

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right] dA$$

dengan

$$E = \{(x,y,z)|(x,z) \in D, u_1(x,z) \le y \le u_2(x,z)\}$$

Contoh

Hitung

$$\iiint_E z dV$$

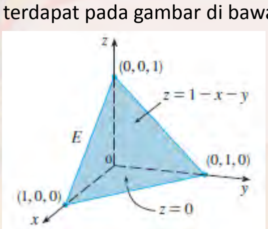
dimana *E* dibatasi oleh bidang $x = 0$, bidang $y = 0$, bidang $z = 0$, dan $x + y + z = 1$.

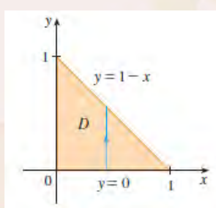
Solusi:

Domain *E*

$$E = \{(x,y,z)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\}$$

dan daerah *D* sebagai proyeksi *E* pada bidang *XOY* terdapat pada gambar di bawah ini





Sehingga

$$\iiint_E z dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 \, dy dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{2}\right]_{x=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Contoh

Hitung

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \sin y^2 \, dz \, dy \, dx$$

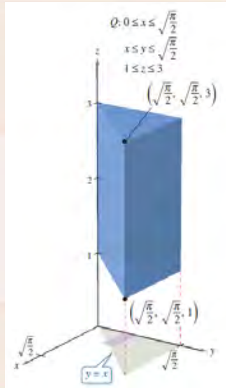
Solusi:

Dari soal, batas daerah integrasi adalah daerah benda padatan Q dengan persamaan

$$0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$
$$x \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$
$$1 \le z \le 3$$

(seperti terlihat pada gambar di samping). Proyeksi pada bidang-xy adalah

$$0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0 \le x \le y$$



Sehingga, menghitung integral dengan urutan $dzdxdy$ menghasilkan

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} \int_1^{3} \sin y^2 \, dzdxdy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} (z \sin y^2)_1^3 \, dx\, dy$$
$$= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} \sin y^2 \, dx\, dy$$
$$= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (x \sin y^2)_0^y \, dy$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (x \sin y^2)_0^y \, dy$$
$$= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y \sin y^2 \, dy$$
$$= (-\cos y^2)_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 1.$$

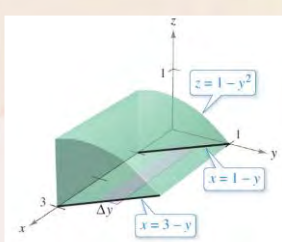
Contoh

Buat rumus integral lipat tiga untuk menghitung volume dari tiap benda padatan di bawah ini.

a. Benda di oktan I yang dibatasi di atas oleh silinder $z = 1 - y^2$ di antara bidang-bidang vertikal $x + y = 1$ dan $x + y = 3$.
b. Setengah bola padatan bagian atas $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
c. Benda yang dibatasi di bawah oleh parabooid $z = x^2 + y^2$ dan di atas oleh kulit bola $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Solusi:

a. Batas bawah pada benda di samping adalah bidang-xy (atau bidang $z = 0$). Bagian atas oleh silinder $z = 1 - y^2$. Proyeksi benda pada bidang-xy berbentuk jajaran genjang.



Batas jajaran genjang adalah
$$1 - y \le x \le 3 - y \text{ dan } 0 \le y \le 1.$$

Jadi batas benda padatan Q pada gambar di atas secara lengkap adalah

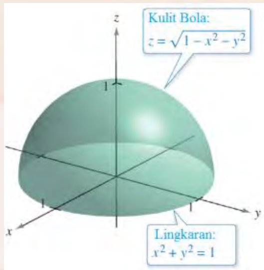
$$Q: 0 \le z \le 1 - y^2,$$
$$1 - y \le x \le 3 - y,$$
$$0 \le y \le 1.$$

Sehingga,

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dz\, dxdy.$$

b. Batas bawah bidang-xy dan batas atas adalah setengah permukaan bola $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Proyeksi benda pada bidang-xy berbentuk cakram dengan batas $x^2+y^2=1$.



Batas cakram berjari-jari 1 adalah

$-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$ dan $-1 \le y \le 1$.

Jadi batas benda padatan Q pada gambar di atas secara lengkap adalah

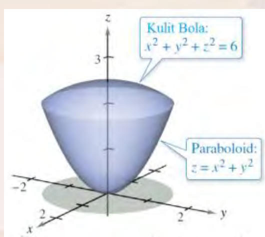
$$Q: 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2},$$
$$-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2},$$
$$-1 \le y \le 1.$$

Sehingga,

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\, dxdy.$$

c. Batas bawah adalah paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan batas atas adalah kulit bola $z = \sqrt{6-x^2-y^2}$

Kedua permukaan berpotongan pada saat $z = 2$, sehingga proyeksi pada bidang-xy adalah $x^2+y^2=2$.



Batas cakram $x^2+y^2=2$ adalah

$-\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2}$ dan $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

Jadi batas benda padatan Q pada gambar di atas secara lengkap adalah

$$Q: x^2+y^2 \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2},$$
$$-\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2},$$
$$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}.$$

Sehingga,

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz\, dydx.$$

Latihan

1. Dengan sistem koordinat kutub, hitung integral rangkap dua

$$\iint_R e^{-(a^2+b^2)}\, dA$$

dimana daerah R terletak di kuadran pertama dan dibatasi oleh lingkaran $x^2+y^2=a^2$ dan sumbu-sumbu koordinat.

2. Dengan integral rangkap dua, hitung volume benda yang dibatasi oleh $z = 4 - x^2$, bidang XOY, XOZ dan $y = 3$.
3. Tentukan massa plat tipis yang dibatasi oleh kurva-kurva $y^2 - x = 0$, $2x + y - 3 = 0$, $y - 2 = 0$ dan sumbu y. Kerapatan plat tipis tersebut sebanding dengan jarak titik-titiknya terhadap sumbu x.
4. Hitung

$$\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} (x^2+y^2+z^2)\, dzdydx$$

5. Hitung

$$\iiint_B xyz^2 dV$$

dimana B adalah

$B = \{(x, y, z) | 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$

6. Hitung

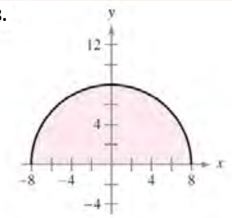
$$\int_1^2 \int_0^z \int_0^y \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} dxdydz$$

7. Hitung

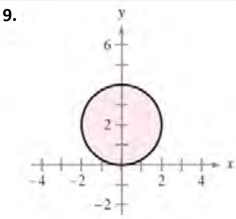
$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} dxdydz$$

Untuk soal 8 - 10 di bawah ini, gunakan sistem koordinat polar untuk menyatakan daerah yang diberikan

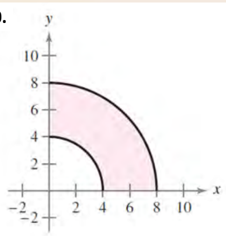
8.



9.



10.



Untuk soal 11 - 14 di bawah ini, hitung integral lipat dua $\iint_R f(x, y)\, dA$.

11. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \sqrt{9-r^2}\, r dr d\theta$$

12. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 re^{-r^2} dr d\theta$$

13. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1+\sin\theta} \theta r dr d\theta$$

14. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-\cos\theta} (\sin\theta) r dr d\theta$$

Untuk soal 15 - 19 di bawah ini, hitung integral lipat dua dengan merubahnya ke dalam sistem koordinat polar.

15. $$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y dx dy$$

16. $$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy dx$$

17. $$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2) dy dx$$

18. $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2+y^2) dy dx$$

19. $$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx$$

Untuk soal 20 - 23 di bawah ini, hitung integral lipat dua dengan merubahnya ke dalam sistem koordinat polar.

20. $f(x,y) = x + y, R: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

21. $f(x,y) = e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}, R: x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0$

22. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}, R: x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x$

23. $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2, R: x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$

Untuk soal 24 - 27 berikut ini, gunakan integral lipat dua dalam sistem koordinat polar untuk menentukan volume dari benda padatan yang dibatasi oleh persamaan-persamaan yang diberikan.

24. $z = xy, x^2 + y^2 = 1$, oktan I

25. $z = x^2 + y^2 + 3, z = 0, x^2 + y^2 = 1$

26. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 25$

27. $z = \ln(x^2 + y^2), z = 0, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4$

Untuk soal 28 - 34 di bawah ini, hitung integral lipat tiga.

28. $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z)\, dxdzdy$

29. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2y^2z^2\, dxdydz$

30. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\, dzdydx$

31. $\int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\, dzdxdy$

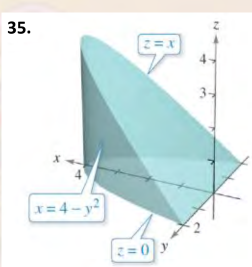
32. $\int_1^4 \int_0^1 \int_0^x 2ze^{-x^2}\, dydxdz$

33. $\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{\frac{1}{xz}} \ln z\, dydzdx$

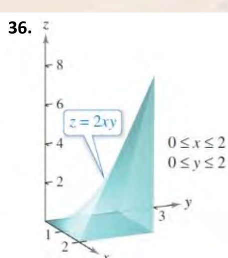
34. $\int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-x} x \cos y\, dzdydx$

Untuk soal 35 - 38 di bawah ini, gunakan integral lipat tiga untuk menentukan volume benda di bawah ini.

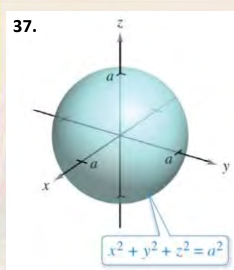
35.



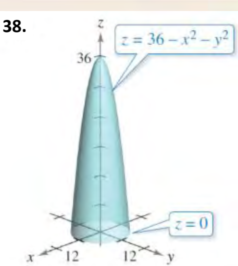
36.



37.



38.



Untuk soal 39 - 41 di bawah ini, sketsa benda padatan yang volumenya dihitung dari integral lipat tiga yang diberikan, kemudian tulis ulang integral menggunakan urutan integrasi yang disarankan.

39. $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz\, dydx; dydzdx.$

40. $\int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} dz\, dxdy; dxdzdy.$

41. $\int_0^4 \int_0^{\frac{(4-x)}{2}} \int_0^{\frac{(12-3x-6y)}{4}} dz\, dydx; dydxdz$

Untuk soal 42 - 45 di bawah ini, daftarkan 6 urutan integrasi yang mungkin untuk integral lipat 3 sepanjang Q, $\iiint_Q xyz\, dV$.

42. $Q = \{(x,y,z): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le 3\}$

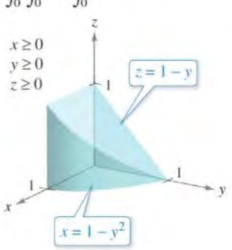
43. $Q = \{(x,y,z): 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4, 0 \le z \le 2 - x\}$

44. $Q = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \le y \le 9, 0 \le z \le 4\}$

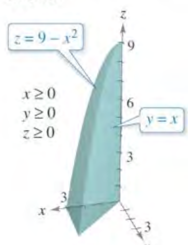
45. $Q = \{(x,y,z): 0 \le x \le 1, y \le 1 - x^2, 0 \le z \le 6\}$

Untuk soal 46 - 47 di bawah ini, daftarkan 5 urutan integrasi yang lain untuk integral lipat 3 yang diberikan.

46. $\int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{1-y} dz\, dx\, dy$



47. $\int_0^3 \int_0^x \int_0^{9-x^2} dz\, dy\, dx$



Pertemuan 7

- **Aplikasi integral multivariabel**

Penggunaan Integral Rangkap Tiga

Menghitung volume benda yang dibatasi domain *D*

$$V = \iiint_D dV$$

Untuk benda dimensi tiga tidak homogen dengan volume *D* yang mempunyai kerapatan/densitas (massa per satuan volume) $\delta(x, y, z)$ dan elemen volumenya dV di (*x*,*y*,*z*) maka massa elemen volume tersebut adalah

$$dm = \delta(x, y, z)dV$$

Moment pertama terhadap bidang-bidang koordinat,

- terhadap bidang *YOZ*:

$$M_{yz} = \iiint_D x\delta(x, y, z)dV$$

- terhadap bidang *XOZ*:

$$M_{xz} = \iiint_D y\delta(x, y, z)dV$$

- terhadap bidang *XOY*:

$$M_{xy} = \iiint_D z\delta(x, y, z)dV$$

Massa benda

$$m = \iiint_D \delta(x, y, z)dV$$

Pusat massa

$$x_p = \frac{M_{yz}}{m}, y_p = \frac{M_{xz}}{m}, z_p = \frac{M_{xy}}{m}$$

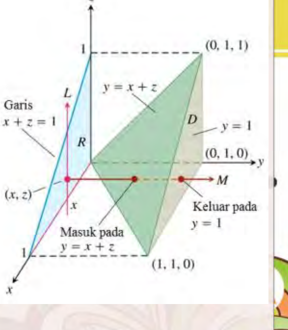
Contoh

Tentukan batas-batas integrasi dari integran *F*(*x*,*y*,*z*) sepanjang tetrahedron yang mempunyai titik sudut di (0,0,0), (1,1,0), (0,1,0), dan (0,1,1).

Solusi:

Batas-batas integrasi adalah

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 f(x, y, z)dydzdx$$



Contoh

Integralkan *f*(*x*,*y*,*z*) = 1 sepanjang tetrahedron yang didefinisikan pada contoh soal sebelumnya dengan urutan integrasi *dydzdx* dan kemudian dirubah menjadi *dzdydx*.

Solusi:

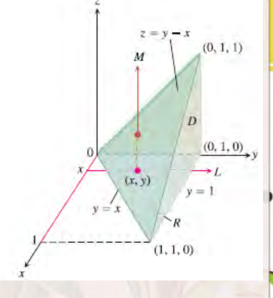
Jika urutan itegrasi adalah *dydzdx* (dengan gambar dan batas-batas integrasi terdapat pada contoh sebelumnya) maka diperoleh volume tettrahedron sebagai berikut:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1} dy\, dz\, dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - z)\, dz\, dx$$
$$= \int_0^1 \left[(1-x)z - \frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left[(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\, dx$$
$$= -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Urutan integrasi akan dirubah menjadi *dydzdx*.

Dengan memperhatikan gambar di samping dapat dilihat batas-batas integrasi sebagai berikut

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} f(x,y,z)dydzdx$$



Volume tetrahedron adalah

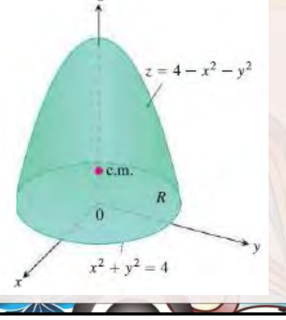
$$V = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \int_x^1 (y - x)\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - xy\right]_{y=x}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{6}.$$

Contoh

Tentukan titik pusat massa benda padatan dengan kerapatan konstan yang dibatasi bagian di bawah oleh cakram $R: x^2 + y^2 \leq 4$ dan di atas oleh paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.

Solusi:

Gambar benda dari soal di atas terlihat pada gambar di bawah ini.



Karena benda padatan simetri maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$ $(x_p = y_p = 0)$ dan

$$M_{xy} = \iint_R \left[\int_0^{4-x^2-y^2} z\delta dz \right] dA$$
$$= \iint_R \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta dA$$
$$= \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 \, dA$$
$$= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 \, r dr d\theta$$

$$M_{xy} = \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6}(4 - r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$
$$= \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \frac{32\pi\delta}{3}.$$

Dengan perhitungan yang serupa, diperoleh massa

$$m = \iint_R \left[\int_0^{4-x^2-y^2} \delta dz \right] dA = 8\pi\delta.$$

Sehingga

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{32\pi\delta}{3}}{8\pi\delta} = \frac{4}{3}$$

dan titik pusat massa adalah

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{4}{3}\right).$$

Latihan

1. Diketahui suatu benda di oktan I yang dibatasi bidang kuadrik $z = 4 - y^2$, bidang $y = x$, bidang XOY dan bidang YOZ
   a. sketsa benda tersebut
   b. tentukan volume benda tersebut
2. Dengan sistem koordinat tabung, hitung momen inersia terhadap sumbu z dari sebuah benda yang dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$ dan kerucut $z^2 = x^2 + y^2$, jika rapat massanya $\delta = 2$.