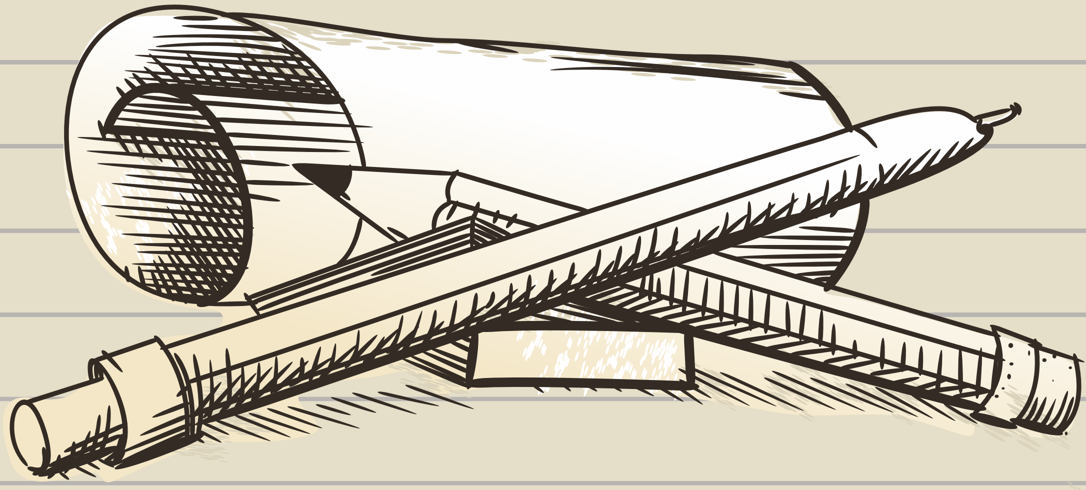


EPS

Materi UTS

Kalkulus 1

Semester Gasal 2016 - 2017

Pengajar: Hazrul Iswadi

Daftar Isi

Kalkulus I 1600A101

Pendahuluan UTS
Semester Gasal 2016-2017

Materi per Pertemuan

Pertemuan	Materi
1	Sistem Bilangan
2	Lanjutan Sistem Bilangan
3	Pertidaksamaan
4	Fungsi
5	Lanjutan Fungsi
6	Lanjutan Fungsi
7	Limit dan Kekontinuan

Pertemuan	Materi
8	Lanjutan Limit dan Kekontinuan
9	Lanjutan Limit dan Kekontinuan
10	Turunan
11	Lanjutan Turunan
12	Aplikasi Turunan
13	Lanjutan Aplikasi Turunan
14	Lanjutan Aplikasi Turunan

Kuis

Diselenggarakan di awal perkuliahan, waktu 50-60 menit, soal 3-4.

Penilaian

NTS terdiri dari nilai asistensi, rata-rata tugas, rata-rata kuis, UTS

Format Tugas

- Satu kelompok ***terdiri dari 5-6 mahasiswa***.
- Kelompok dan anggota kelompok dibentuk pada minggu ke-1.
- Ditulis pada ***kertas A4 HVS, tidak bolak-balik***.
- ***Pakai template cover*** yang diberikan.
- ***Distaples 2 buah dipinggir***.

Sumber Materi Kuliah

Buku-buku:

1. Blank, B.E, dan Krantz, S.G., Dale Varberg, *Calculus – Multivariable*, edisi 2, John Wiley & Sons, Inc., 2011.
2. Hughes-Hallett, D., dkk., *Calculus – Single and Multivariable*, edisi 6, John Wiley & Sons, Inc., 2013
3. ***Larson, R., dan Bruce, E., Calculus, edisi 10, John Wiley & Sons, Inc., 2014***.
4. ***Iswadi, H., dkk., Kalkulus.***

Slide, Tugas, Nilai, dan Pengumuman dapat dilihat di:

1. Ubaya Learning Space, ***uls.ubaya.ac.id***
2. Hazrul Iswadi Personal Web, ***www.hazrul-iswadi.com***

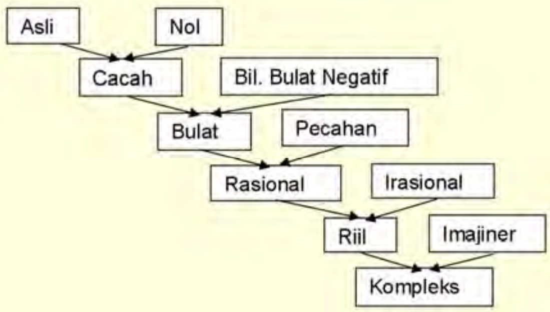
Bab 1

Sistem Bilangan dan Pertidaksamaan

Pendahuluan

- Matematika berkaitan erat dengan bilangan.
- Dalam kamus besar bahasa Indonesia, matematika adalah ilmu tentang bilangan-bilangan.
- Untuk mempelajari kalkulus (yang merupakan bagian dari matematika) terlebih dahulu harus mengerti sifat-sifat bilangan.
- Fungsi yang dipelajari dalam kalkulus sebagian besar mempunyai daerah definisi bilangan riil.

Pohon Bilangan



Sistem Bilangan Riil

Himpunan bilangan riil bersama-sama dengan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian membentuk suatu sistem yang dikenal dengan **sistem bilangan riil**

Sifat-sifat Dasar Bilangan Riil…

Misalkan *x*, *y*, dan *z* bilangan riil.

1. Komutatif : $x+y=y+x$ dan $xy=yx$.
2. Asosiatif : $x+(y+z)=(x+y)+z$ dan $x(yz)=(xy)z$.
3. Distributif : $x(y+z)=xy+xz$.

Sifat-sifat Dasar Bilangan Riil

4. Elemen identitas, yaitu 0 dan 1 yang memenuhi $x+0=x$ dan $x.1=x$.
5. Unsur invers :
   a. Invers penjumlahan untuk x adalah $-x$
   b. Invers perkalian untuk x ($x \neq 0$) adalah $\frac{1}{x}$

Pengurangan dan Pembagian

Pengurangan dan pembagian didefinisikan sebagai:

$$x - y = x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}$$

Garis Riil…

- Secara geometri, bilangan riil dapat digambarkan sebagai titik dalam garis bilangan yang disebut sebagai *garis riil.*
- Setiap bilangan riil berhubungan dengan *satu dan hanya satu* titik di garis riil.

Garis Riil

- Bilangan negatif letaknya pada bagian kiri dan bilangan positif letaknya pada bagian kanan dari bilangan nol
- Perlu konsep urutan

Urutan…

- Bilangan riil y pada bagian kanan lebih besar nilainya daripada bilangan riil x pada bagian kiri
- Simbol $x < y$.

Urutan

- Simbol-simbol lain yang menyatakan urutan adalah >, ≤ dan ≥, dengan perjanjian: $x > 0$ jika dan hanya jika x bilangan positif dan $x \geq 0$ jika dan hanya jika x bilangan positif atau nol

Sifat Urutan…

Misalkan x, y, dan z adalah bilangan riil. Berlaku sifat-sifat berikut:

1. Trikotomi: untuk setiap x dan y, berlaku $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.
2. Transitif: jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.
3. Penambahan: jika $x < y$ maka $x + z < y + z$.

Sifat Urutan

4. Perkalian:
   - jika z positif dan $x < y$ maka $xz < yz$.
   - jika z negatif dan $x < y$ maka $xz > yz$.

Sifat-sifat 2, 3, dan 4 berlaku juga untuk relasi $\le$ dan $\ge$.

Definisi Eksponen untuk Pangkat Nol, Negatif dan Pecahan

Didefinisikan $a^0 = 1$,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \begin{cases} a \in \Re,\ n \text{ gasal} \\ a > 0,\ n \text{ genap} \end{cases}$$

Sifat Eksponen

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$
4. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
5. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
8. $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

Definisi Nilai Mutlak

Misal x bilangan riil, nilai mutlak x dinotasikan dengan $|x|$. didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Sifat Nilai Mutlak …

1. $\forall x \in \Re$, berlaku :
   - $|x| \ge 0$
   - $|-x| = |x|$
   - $|x|^2 = |x^2| = x^2$.
2. $\forall x, y \in \Re$, berlaku :
   - $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$.

Sifat Nilai Mutlak …

3. $\forall a \ge 0$, berlaku :
   - $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x^2 \le a^2$.
   - $|x| \ge a \Leftrightarrow a \le x$ atau $x \le -a \Leftrightarrow x^2 \ge a^2$.
4. Ketidaksamaan segitiga, $\forall x, y \in \Re$, berlaku :
   - $|x+y| \le |x| + |y|$.
   - $|x-y| \le |x| + |y|$.
   - $|x| - |y| \le |x-y|$.
   - $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$

Sifat Nilai Mutlak

5. $\forall x, y \in \Re$, berlaku :
   - $|xy| = |x|\,|y|$
   - $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Selang

- *Selang* atau *interval* adalah himpunan bagian dari bilangan riil yang terdiri dari dua buah bilangan bersama dengan semua bilangan yang terletak di antara kedua bilangan tersebut
- Berdasarkan sifat dua bilangan di ujung-ujung selang dikenal macam-macam selang :
- **Selang hingga** jika kedua bilangan di ujung-ujung interval adalah bilangan riil.
- **Selang tak hingga** jika salah satu atau kedua bilangan di ujung-ujung interval adalah bilangan ∞ atau $-\infty$.

Selang Hingga

Notasi	Himpunan	Grafik garis bilangan	Nama selang
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b	Selang buka
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	a b	Selang tutup
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	a b	Selang setengah tutup-setengah buka
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	a b	Selang setengah buka-setengah tutup

Selang Tak Hingga

Notasi	Himpunan	Grafik garis bilangan	Nama selang
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a	Sinar buka kiri
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	a	Sinar tutup kiri
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b	Sinar buka kanan
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	b	Sinar tutup kanan
$(-\infty, \infty)$	Himpunan semua bil. real		Garis bilangan

Bab 1

Sistem Bilangan dan Pertidaksamaan

Bilangan Kompleks

- Bentuk *a* + *bi*.
- Simbol *z* = *a* + *bi*, dengan *a* dan *b* bilangan riil dan $i = \sqrt{-1}$.
- *a* disebut bagian riil *z* → $\mathrm{Re}\{z\}$
- *b* disebut bagian imajiner *z* → $\mathrm{Im}\{z\}$

Kesamaan Dua Bil Kompleks

Misalkan $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2 i$ maka berlaku $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

Operasi Bilangan Kompleks …

Misalkan $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2 i$ maka berlaku

1. Penjumlahan dan pengurangan

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)\, i$$

2. Perkalian

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i$$

Operasi Bilangan Kompleks …

3. Kebalikan atau invers

Kebalikan dari $z \neq 0$ adalah z^{-1} yang memiliki sifat $zz^{-1} = 1$.

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\, i$$

4. Pembagian z_1 dengan z_2

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2}\, i$$

Operasi Bilangan Kompleks

5. Sekawan (conjugate) dari z adalah

$$\bar{z} = x - yi$$

Unsur-Unsur Bil Kompleks

1. Unsur nol

   Unsur nol bilangan kompleks berbentuk $0+0i$

2. Unsur satuan

   Unsur satuan bilangan kompleks adalah $1+0i$

3. Unsur negatif

   Unsur negatif *z* adalah -*z* = -*x* – *yi*

Sifat Operasi Bil Kompleks …

1. Komutatif

   $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1 z_2 = z_2 z_1$

2. Asosiatif

   $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ dan

   $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

3. Distributif

   $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Sifat Operasi Bil Kompleks

4. Distributif sekawan

   $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$$

   $$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2};$$

   $$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$$

5. $\bar{\bar{z}} = z$

6. $z\bar{z} = [\mathrm{Re}\{z\}]^2 + [\mathrm{Im}\{z\}]^2$

Contoh

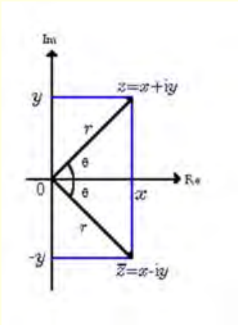
Jika $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 4 + 7i$. Tentukan

- $\mathrm{Re}\{z_1\}$
- $\mathrm{Im}\{z_1\}$
- $z_1 + z_2$
- $z_1 - z_2$
- $z_1 z_2$
- $\dfrac{z_1}{z_2}$
- $\bar{z}_1$

Geometri Bil Kompleks

- Bilangan kompleks $z = x + yi$ dapat dipandang sebagai sebuah vektor pada bidang datar dengan titik awal (0,0) dan titik ujung (*x*,*y*).
- Bidang untuk menggambarkan suatu bilangan kompleks disebut dengan **bidang Argand**.
- Bidang Argand serupa dengan bidang kartesius tetapi dengan sumbu riil dan sumbu imajiner.

Bidang Argand



Modulus

Modulus $z = x + yi$, sering ditulis dengan $|z|$, adalah panjang vektor z

$$|z| = \left[x^2 + y^2\right]^{1/2}$$

Sifat Modulus

1. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
2. $|z - w| = |w - z|$
3. $|z|^2 = |z^2| = z\bar{z}$
4. $|zw| = |z||w|$
5. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
6. $|z + w| \le |z| + |w|$
7. $||z| - |w|| \le |z - w|$
8. $|z| - |w| \le |z + w|$

Argumen

- Argumen $z = x + yi$, ditulis dengan $\arg z$, didefinisikan sebagai sudut yang dibentuk oleh vektor z terhadap sumbu riil positif dengan arah berlawanan jarum jam.
- $\arg z$ adalah sudut θ sedemikian sehingga $\tan\theta = \frac{y}{x}$ atau $\arg z = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Nilai Utama Argumen

- Nilai utama $\arg z$, ditulis dengan Arg z yaitu $0 < \mathrm{Arg}\ z < 2\pi$.
- arg z = Arg z + $2k\pi$.
- Khusus untuk x = 0 maka $\arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ atau $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Bentuk Kutub dan Euler

- Bilangan kompleks $z = x + yi$ dapat dinyatakan bentuk kutub dengan transformasi

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta),$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Bentuk kutub: $z = r(\cos\theta + \sin\theta\, i)$.
- Atau $z = r cis\theta = r cis(\mathrm{Arg}\ z + 2k\pi)$
- Bentuk Euler $z = re^{i\theta}$

Contoh

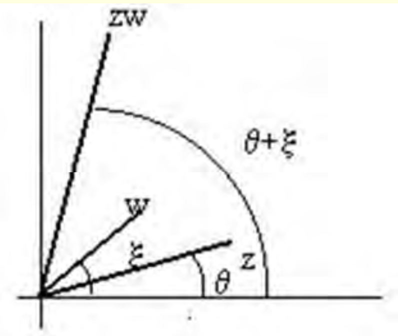
Tentukan $|z|$, $\arg(z)$ dan nyatakan dalam bentuk kutub dan Euler serta gambarkan dalam bidang argand bilangan kompleks berikut

1. $z = 1 + \sqrt{3}i$
2. $z = -\sqrt{3} + i$
3. $z = 1 - \sqrt{3}i$
4. $z = -\sqrt{3} - i$

Operasi Bil Kompleks dalam Bentuk Kutub

Misalkan $z = r cis\theta$, $z_1 = r_1 cis\theta_1$, dan $z_2 = r_2 cis\theta_2$ maka

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ dan $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, k bilangan bulat.
2. $z_1 z_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2)$.
4. $z^n = r^n cis(n\theta)$



De Moivre is also famous for his work in complex analysis—he gives an expression for the higher powers of certain trigonometric functions. In fact, an arbitrary complex number could be expressed with trigonometric functions; thus, he was able to connect trigonometry to analysis.

Menentukan Akar Persamaan Bilangan Kompleks …

Langkah penyelesaian persamaan bilangan kompleks $z^n = c$, dengan c bilangan kompleks

- Nyatakan $z^n = r^n cis(n\theta)$ dan $c = \rho cis\phi$
- Substitusikan ke persamaan didapat $r^n cis(n\theta) = \rho\, cis\phi$.

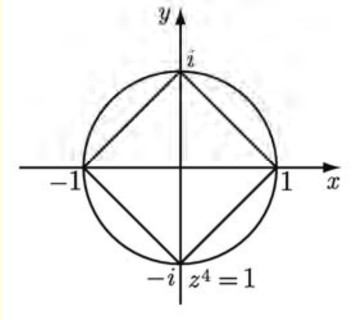
Menentukan Akar Persamaan Bilangan Kompleks

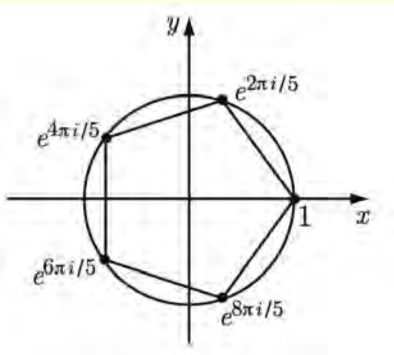
- Dengan sifat kesamaan bil kompleks didapat $r = \rho^{\frac{1}{n}}$ dan $\theta_k = \frac{1}{n}(\phi + 2k\pi)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.
- Penyelesaian persaman $z^n = c$ adalah $z_k = \rho^{\frac{1}{n}} cis\theta_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Contoh

Tentukan akar-akar persamaan kompleks berikut:

- $z^4 = 1$.
- $z^5 = 1$.





Contoh

Tentukan akar-akar persamaan kompleks berikut

- $z^3 = -2 + 2i$
- $z^4 = -4$
- $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$

Latihan

Diketahui $z_1 = -3 + 3i, z_2 = -4i + 6$, tentukan

1. $\text{Re}\{z_1\}$ dan $\text{Im}\{z_1\}$
2. $\text{Re}\{z_2\}$ dan $\text{Im}\{z_2\}$
3. $z_1 + z_2$
4. $z_1 - z_2$
5. $\bar{z}_1$ dan $\bar{z}_2$
6. $z_1 z_2$
7. $\dfrac{z_1}{z_2}$
8. $|z_1|$ dan $Arg(z_1)$
9. Bentuk kutub z_1
10. bentuk Euler z_1
11. Akar-akar $z^3 = \dfrac{3}{2} z_1^{\,2}$

Kunci Jawaban

1. $-3, 3$
2. $6, -4$
3. $3 - i$
4. $-9 + 7i$
5. $-3 - 3i,\ 4i + 6$
6. $-6 + 30i$
7. $-\dfrac{15}{26} + \dfrac{3}{26} i$
8. $3\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$
9. $3\sqrt{2} cis\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$
10. $3\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4} i}$
11. $3i, -\dfrac{1}{2}\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} i, \dfrac{1}{2}\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} i$

Bab 1
Sistem Bilangan dan Pertidaksamaan

Pertidaksamaan

Pertidaksamaan diperoleh dari persamaan dengan mengganti tanda = dengan tanda-tanda <, >, ≤, atau ≥.

1. $2x - 10 < 3x + 4$.
2. $x^2 - x < 12$.
3. $\dfrac{x-1}{x^2-4} \geq 0$.
4. $\dfrac{4x+7}{6x-1} \leq 2x$.

Bentuk Umum Pertidaksamaan Rasional

- $\dfrac{A(x)}{B(x)} < \dfrac{C(x)}{D(x)}$, (< dapat diganti oleh >, ≤, atau ≥)
- $A(x), B(x), C(x)$, dan $D(x)$ adalah suku banyak dengan koefisien riil.

Langkah Umum Penyelesaian Pertidaksamaan Rasional ...

- Tentukan pada daerah mana pertidaksamaan dapat terdefinisi. $B(x) \neq 0, D(x) \neq 0$
- Buat salah satu ruas (ruas kiri atau kanan) sama dengan nol. Sehingga bentuk umum pertidaksamaan berubah bentuk menjadi $\dfrac{R(x)}{S(x)} < 0$.

Langkah Umum Penyelesaian Pertidaksamaan Rasional ...

- $R(x)$ dan $S(x)$ diuraikan atas faktor linier atau kuadrat definit positif.
- Menentukan nilai batas. Nilai batas adalah solusi persamaan $R(x) = 0$ dan $S(x) = 0$.
- Menggambarkan selang dengan nilai batas. Gambar batas pada garis bilangan riil dengan memperhatikan daerah definisi dan tanda ketaksamaan.

Langkah Umum Penyelesaian Pertidaksamaan Rasional ...

- Menentukan tanda selang. Penentuan tanda selang dilakukan dengan mengambil wakil atau anggota suatu selang. Selang yang lain:
  1. Jika pangkat pada faktor dalam pertidaksamaan genap maka tanda selang sekitar akar faktor tersebut bertanda sama.
  2. Jika pangkat pada faktor dalam pertidaksamaan gasal maka tanda selang sekitar akar faktor tersebut berlainan tanda.

Langkah Umum Penyelesaian Pertidaksamaan Rasional

- Menentukan Himpunan Penyelesaian pertidaksamaan.

  Himpunan yang dijadikan penyelesaian pertidaksamaan di ambil daerah yang memenuhi syarat pertidaksamaan.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{x}{x+5} \le \frac{x^2}{x-4}$$

Pertidaksamaan Nilai Mutlak …

- Uraikan pertidaksamaan dengan menggunakan definisi atau sifat nilai mutlak menjadi beberapa pertidaksamaan dengan memperhatikan hubungan "dan" atau "atau"
- Tentukan himpunan penyelesaian masing-masing pertidaksamaan.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$|3x-2| \ge 2x$$

Contoh

Solve $\frac{x+2}{x+4} \le 3$.

Solution

First, let's change the form of the given inequality.

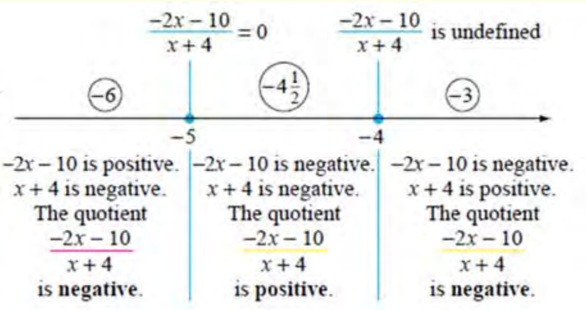
$$\frac{x+2}{x+4} \le 3$$

$$\frac{x+2}{x+4} - 3 \le 0$$

$$\frac{x+2-3(x+4)}{x+4} \le 0$$

$$\frac{x+2-3x-12}{x+4} \le 0$$

$$\frac{-2x-10}{x+4} \le 0$$



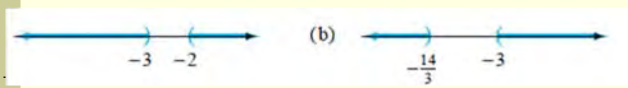
Therefore, the solution set for $\frac{x+2}{x+4} \le 3$ is $(-\infty, -5] \cup (-4, \infty)$.

Solve $\left|\frac{x-2}{x+3}\right| < 4$.

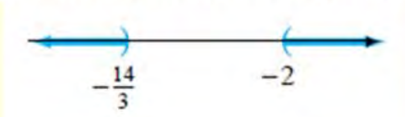
Solution

$\frac{x-2}{x+3} > -4$ and $\frac{x-2}{x+3} < 4$

$\frac{x-2}{x+3} > -4$	and	$\frac{x-2}{x+3} < 4$
$\frac{x-2}{x+3} + 4 > 0$	and	$\frac{x-2}{x+3} - 4 < 0$
$\frac{x-2+4(x+3)}{x+3} > 0$	and	$\frac{x-2-4(x+3)}{x+3} < 0$
$\frac{x-2+4x+12}{x+3} > 0$	and	$\frac{x-2-4x-12}{x+3} < 0$
$\frac{5x+10}{x+3} > 0$	and	$\frac{-3x-14}{x+3} < 0$



The intersection of the two solution sets pictured is



Therefore, the solution set of $\left|\frac{x-2}{x+3}\right| < 4$ is $\left(-\infty, -\frac{14}{3}\right) \cup (-2, \infty)$.

Latihan

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut

1. $\frac{2x+1}{x^2+1} \ge \frac{4+2x}{(x+1)^2}$
2. $\frac{5x-20}{x^2+4} \ge \frac{1-4x}{x}$
3. $\frac{x^3-8}{x^2-2x-15} > 0$
4. $\left|x^2+2x+2\right| > 1$
5. $\left|\frac{x-5}{x+2}\right| \le 4$

Kunci Jawaban

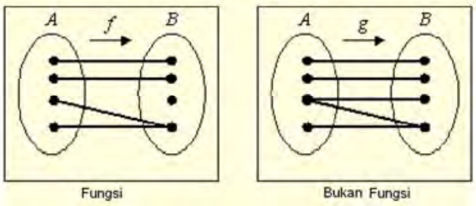
1. $(-\infty, 3] \cup [1, \infty)$
2. $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$
3. $(-3, 2) \cup (5, \infty)$
4. $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
5. $\left(-\infty, -\frac{13}{3}\right] \cup \left[-\frac{3}{5}, \infty\right)$

Pertemuan 4

Bab 2
Fungsi

Definisi Fungsi

Misalkan A dan B merupakan himpunan. Fungsi dari A ke B adalah aturan yang mengkaitkan tiap unsur dalam A dengan suatu unsur *unik/tunggal* di B.

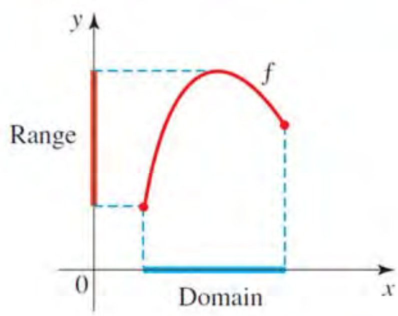


Definisi Domain

Misalkan $f:\Re \to \Re$, $\Re$ adalah himpunan bilangan riil. Domain fungsi *f*, ditulis dengan D_f, adalah himpunan semua nilai $x \in \Re$, sehingga $f(x)$ dapat dihitung sebagai suatu bilangan riil. Domain fungsi *f* kadangkala disebut dengan daerah asal fungsi *f* atau daerah definisi fungsi *f*.

Definisi Range

Misalkan $f:\Re \to \Re$, $\Re$ adalah himpunan bilangan riil. Range fungsi *f*, ditulis dengan R_f, adalah himpunan bagian $\Re$ yang memuat semua nilai-nilai dari fungsi *f*. $R_f := \{y \in \Re; y \text{ nilai dari fungsi } f\}$.



Langkah Menentukan Domain ...

1. Jika berupa fungsi pecahan maka penyebut tidak boleh nol.
2. Tentukan daerah definisi masing-masing komponen atau faktor yang ada dalam fungsi. Daerah definisi komponen dan faktor fungsi tergantung pada bentuk komponen dan faktornya.

Langkah Menentukan Domain

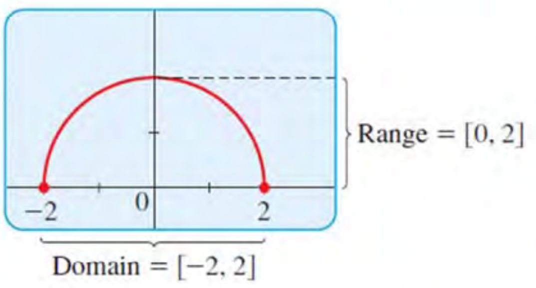
3. Lakukan irisan dari daerah-daerah yang diperoleh pada poin 1 dan 2. Daerah irisan itulah yang menjadi D_f.

Langkah Menentukan Range

Misalkan f mempunyai daerah asal D_f. Untuk menentukan apakah bilangan y yang diberikan merupakan unsur di R_f selesaikan persamaan $f(x) = y,\ x \in D_f$. Jika terdapat solusi untuk $x \in D_f$ maka $y \in R_f$. Jika tidak maka $y \notin R_f$.

Contoh

Sketsa grafik fungsi $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ kemudian tentukan range dan domain fungsi tersebut



Contoh

1. Tentukan D_f fungsi f yang didefinisikan sebagai berikut

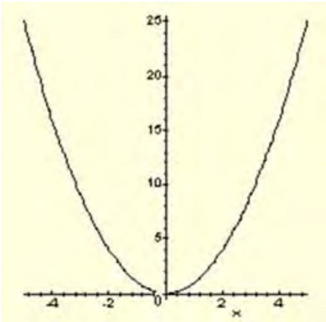
$$f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3+x}} + \sqrt[6]{3x+2} + \frac{1}{x-3}$$

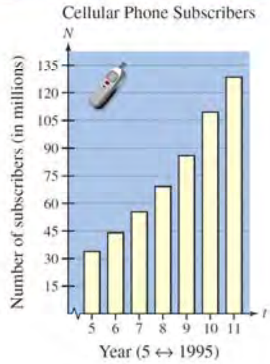
2. Definisikan fungsi $f(x) = 3 + \sqrt{4-x^2}$.
   a. Apakah $4 \in R_f$?
   b. Apakah $2 \in R_f$?
   c. Tentukan R_f.

Grafik Fungsi

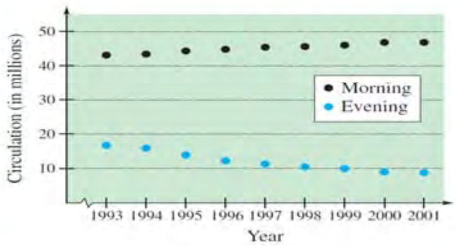
Representasi fungsi:

1. Diagram
2. Tabel
3. Formula
4. Grafik



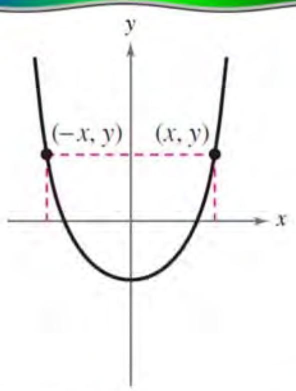


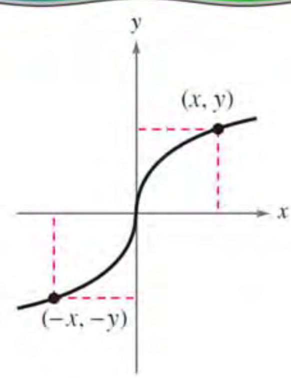
Circulation of Newspapers **In Exercises 11 and 12, use the graph, which shows the circulation (in millions) of daily newspapers in the United States.** (Source: Editor & Publisher Company)

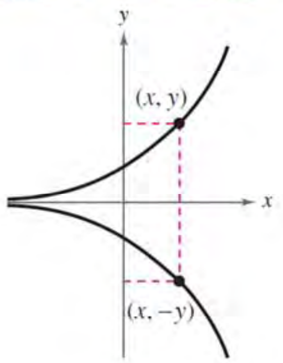


Sifat Fungsi: Genap dan Gasal

1. Fungsi genap: sifat $f(-x) = f(x)$. Bentuk geometri fungsi genap adalah simetri terhadap sumbu *y*.
2. Fungsi gasal: sifat $f(-x) = -f(x)$. Bentuk geometri fungsi gasal adalah simetri terhadap titik asal 0.
3. Fungsi bukan genap dan gasal.





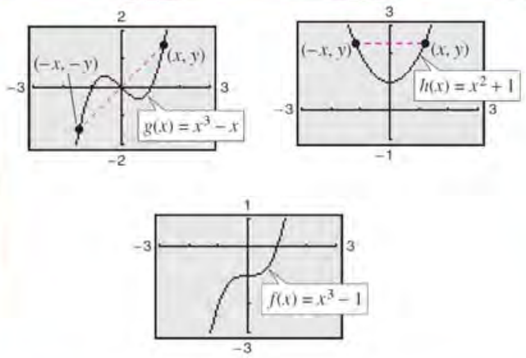


Determine whether each function is even, odd, or neither.

a. $g(x) = x^3 - x$

b. $h(x) = x^2 + 1$

c. $f(x) = x^3 - 1$

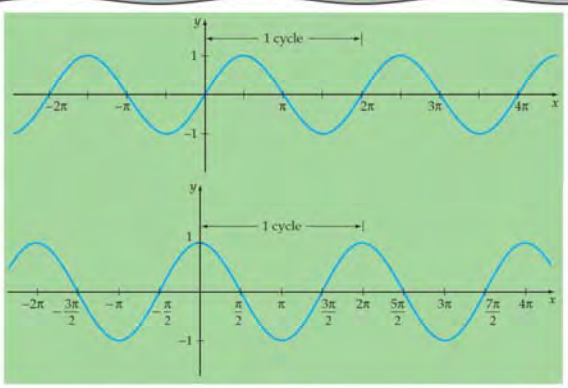


Sifat Fungsi: Periodik

Fungsi f dikatakan periodik jika terdapat suatu bilangan positif p sehingga

$$f(x+p) = f(x), \text{ untuk setiap } x \in D_f.$$

Bilangan p terkecil yang memenuhi sifat di atas disebut dengan *periode* f



Jenis Fungsi

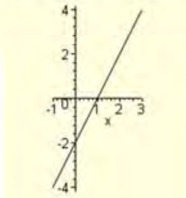
1. Polinom atau suku banyak
2. Fungsi rasional
3. Fungsi trigonometri
4. Fungsi eksponensial
5. Fungsi sepotong-sepotong
6. Fungsi logaritma
7. Fungsi akar
8. Fungsi invers trigonometri

Polinomial (Suku Banyak)

- Suku banyak, $P(x)$, adalah fungsi yang berbentuk $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
  Dengan a_n, a_{n-1}, …, a_1, dan a_0 adalah bilangan riil dan n bilangan cacah.
- Derajat suku banyak $P(x)$ ditandai oleh pangkat tertinggi suku banyak.
- Domain fungsi linier adalah $D_f = \Re$

Fungsi Linier

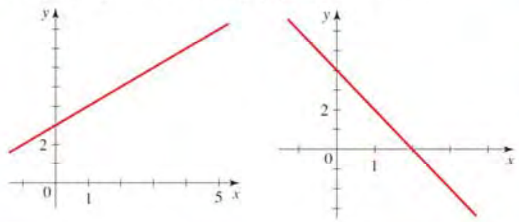
- Bentuk umum: $f(x) = ax + b$
- $D_f = R_f = \Re$
- Gambar grafik fungsi linier adalah garis lurus.
- Contoh grafik $f(x) = 2x - 2$



The graph of a linear function f is given.

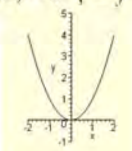
(a) Find the slope and the y-intercept of the graph.

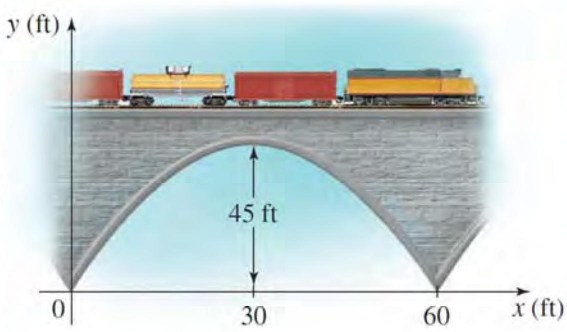
(b) Express f in the form $f(x) = b + mx$.

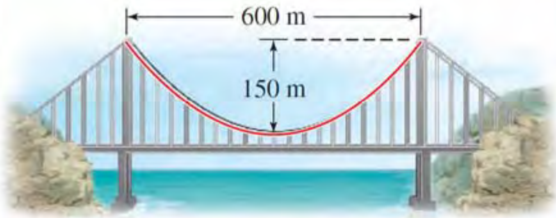


Fungsi Kuadrat

- Bentuk umum: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- $D_f = \Re$
- Gambar grafik fungsi kuadrat adalah parabola
- Contoh grafik $f(x) = x^2$, $D_f = \Re, R_f = [0, \infty)$

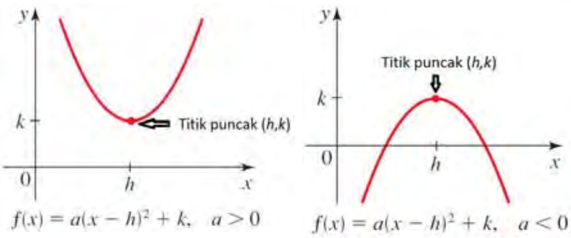






Bentuk lain fungsi kuadratik

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

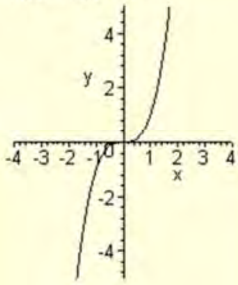


Mendapatkan Bentuk lain fungsi kuadratik dari bentuk umum

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

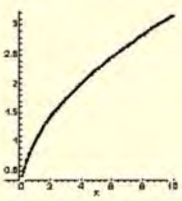
Fungsi Kubik

- Bentuk umum: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $D_f = R_f = \Re$
- Contoh grafik $f(x) = x^3$



Fungsi Akar

- Fungsi akar ke-n , $\sqrt[n]{x}$, adalah fungsi invers dari fungsi $f(x) = x^n$
- $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$
- Jika n genap maka $D_f = [0,+\infty)$
- Jika n gasal maka $D_f = \Re$
- Contoh grafik: $f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0,+\infty)$ $R_f = [0,+\infty)$.

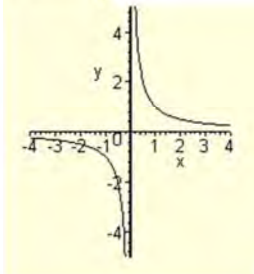


Fungsi Rasional …

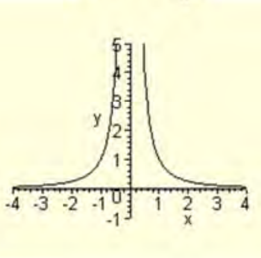
- Bentuk umum: $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ berbentuk suku banyak
- Contoh grafik:
  - $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = R_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$
  - $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $D_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty), R_f = (0,\infty)$

Fungsi Rasional

- $f(x)=\frac{1}{x}$



- $f(x)=\frac{1}{x^2}$

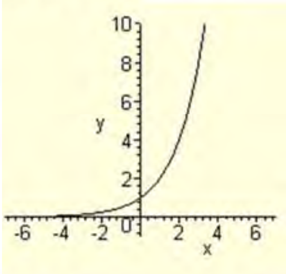


Fungsi Eksponen …

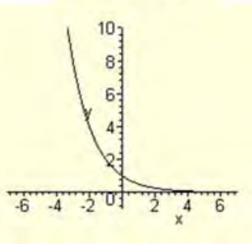
- Bentuk umum: $f(x)=ka^x$, k konstanta, $a>0$
- $D_f=\Re$
- Contoh grafik:
  - $f(x)=2^x$, $D_f=\Re$, $R_f=(0,+\infty)$
  - $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $D_f=\Re$, $R_f=(0,+\infty)$

Fungsi Eksponen

- $f(x)=2^x$

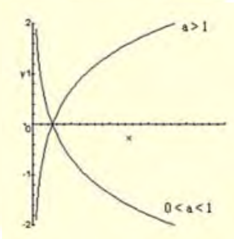


- $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fungsi Logaritma

- Fungsi logaritma, ${}^a\log x$, adalah fungsi invers dari fungsi eksponen
- $y={}^a\log x \Leftrightarrow x=a^y$, $a>0$
- $y={}^e\log x=\ln x$
- $y={}^{10}\log x=\log x$
- $D_f=(0,+\infty)$ dan $R_f=\Re$

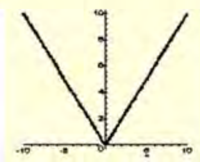


Fungsi Sepotong-sepotong

- Nilai Mutlak
- Heaviside

Fungsi Nilai Mutlak

- Fungsi nilai mutlak adalah fungsi yang melibatkan bentuk $|x|$
- Contoh grafik: $f(x)=|x|$, $D_f=\Re, R_f=[0,\infty)$

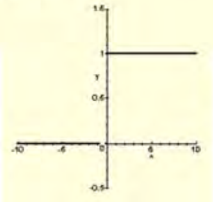


Fungsi Heaviside

- Fungsi Heaviside, $H(x)$, didefinisikan sebagai

$$H(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

- $D_f=\Re, R_f=\{0,1\}$



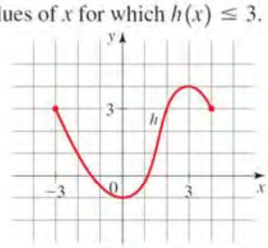
The graph of a function h is given.

(a) Find $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$, and $h(3)$.

(b) Find the domain and range of h.

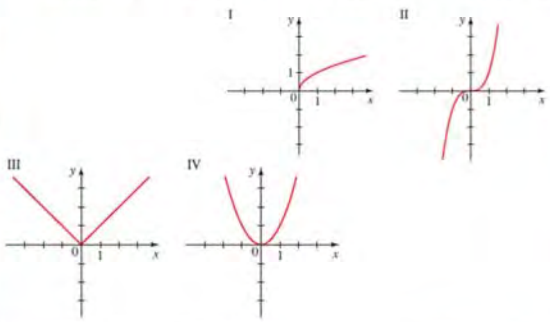
(c) Find the values of x for which $h(x)=3$.

(d) Find the values of x for which $h(x)\le 3$.



Match the function with its graph.

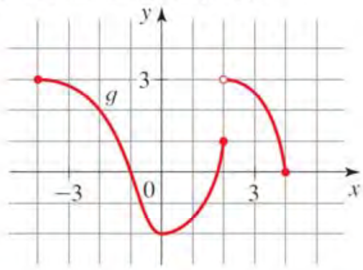
(a) $f(x)=x^2$ **(b)** $f(x)=x^3$ **(c)** $f(x)=\sqrt{x}$ **(d)** $f(x)=|x|$



The graph of a function g is given.

(a) Find $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$, and $g(4)$.

(b) Find the domain and range of g.

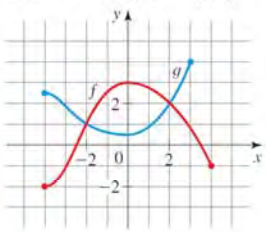


Graphs of the functions f and g are given.

(a) Which is larger, $f(0)$ or $g(0)$?

(b) Which is larger, $f(-3)$ or $g(-3)$?

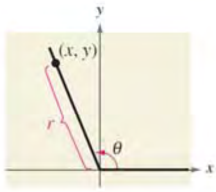
(c) For which values of x is $f(x)=g(x)$?



Bab 2
Fungsi

Fungsi Trigonometri

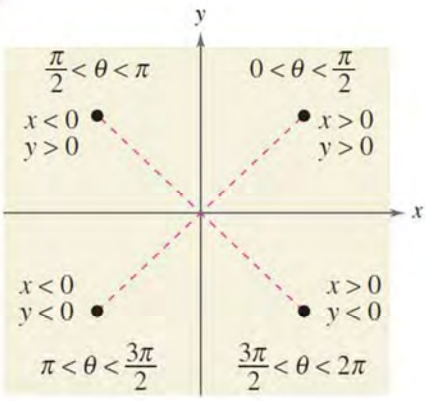
- Sinus
- Cosinus
- Tangen
- Cotangen
- Secant
- Cosecant

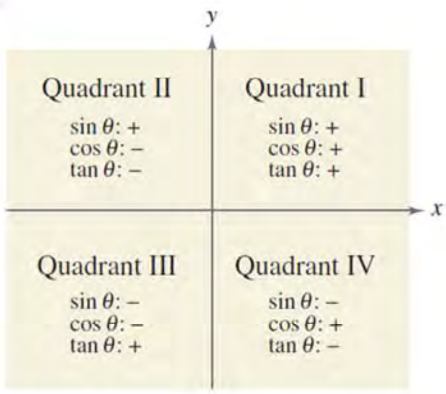


$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x},\quad x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\quad y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x},\quad x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y},\quad y \neq 0$$

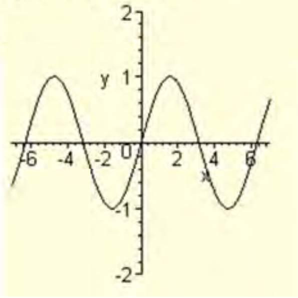




θ (degrees)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
θ (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Undef.	0	Undef.

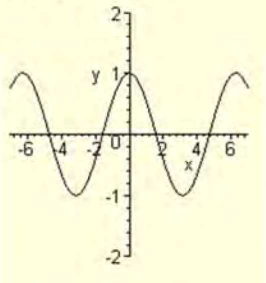
Fungsi Sinus

- Bentuk umum: $f(x) = \sin x$
- Fungsi periodik dengan periode 2π
- $D_f = \Re, R_f = [0,1]$



Fungsi Cosinus

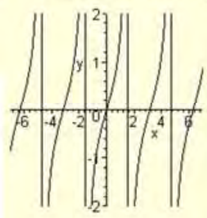
- Bentuk umum: $f(x) = \cos x$
- Fungsi periodik dengan periode 2π
- $D_f = \Re, R_f = [0,1]$



Fungsi Tangen

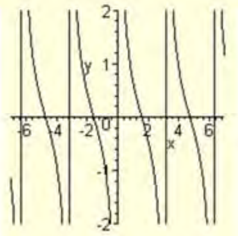
- Bentuk umum: $f(x) = \tan x$
- Fungsi periodik dengan periode π
- $D_f = \left\{ x \in \Re, x \neq \frac{k\pi}{2}, k = \pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ldots \right\}$,

  $R_f = \Re$



Fungsi Cotangen

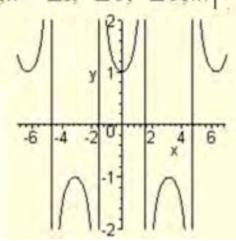
- Bentuk umum: $f(x) = \cot x$
- Fungsi periodik dengan periode π
- $D_f = \{x \in \Re, x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$, $R_f = \Re$



Fungsi Secant

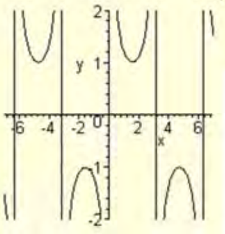
- Bentuk umum: $f(x) = \sec x$
- Fungsi periodik dengan periode 2π
- $D_f = \left\{ x \in \Re, x \neq \frac{k\pi}{2}, k = \pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ldots \right\}$

  $R_f = \Re - (-1,1)$



Fungsi Cosecant

- Bentuk umum: $f(x) = \csc x$
- Fungsi periodik dengan periode 2π
- $D_f = \{x \in \Re, x \neq k\pi, k = 0, \pm1, \pm3, \pm5, \ldots\}$, $R_f = \Re - (-1,1)$

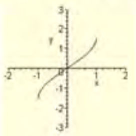


Fungsi Invers Trigonometri

- ArcSinus
- ArcCosinus
- ArcTangen
- ArcCotangen
- ArcSecant
- ArcCosecant

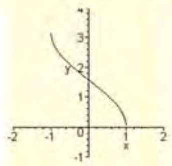
Fungsi ArcSinus

- $f(x) = \arcsin x$ adalah invers $f(x) = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \sin^{-1} x$
- $D_f = [-1,1]$ dan range $R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



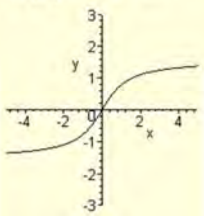
Fungsi ArcCosinus

- $f(x) = \arccos x$ adalah invers $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \cos^{-1} x$.
- $D_f = [-1,1]$ dan range $R_f = [0, \pi]$.



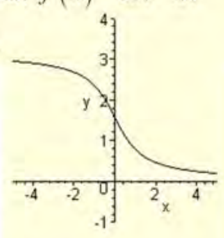
Fungsi ArcTangen

- $f(x) = \arctan x$ adalah invers $f(x) = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \tan^{-1} x$.
- $D_f = \Re$ dan $R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



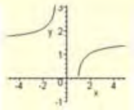
Fungsi ArcCotangen

- $f(x) = arc\cot x$ adalah invers $f(x) = \cot x$, $x \in (0, \pi)$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \cot^{-1} x$.
- $D_f = \Re$ dan $R_f = (0, \pi)$.



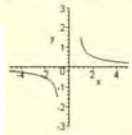
Fungsi ArcSecant

- $f(x) = arc\sec x$ adalah invers $f(x) = \sec x$, $x \in [0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \sec^{-1} x$.
- $D_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ dan $R_f = [0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.



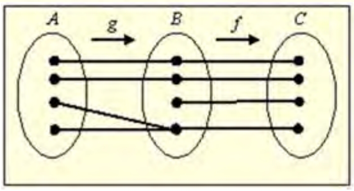
Fungsi ArcCosecant

- $f(x) = arc\csc x$ adalah invers $f(x) = \csc x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \csc^{-1} x$.
- $D_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ dan $R_f = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.



Komposisi Fungsi

- Misal $g : A \to B$ dan $f : B \to C$ dengan $R_g \cap D_f \neq \varnothing$
- Komposisi f dan g didefinisikan sebagai
  $$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
- Secara umum $f \circ g \neq g \circ f$.



Contoh

Diketahui $f(x) = \log x$ dan $g(x) = \sqrt{x}$

a. apakah $f \circ g$ ada?

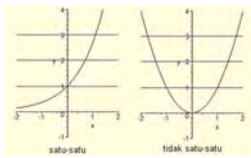
b. jika $f \circ g$ ada bagaimana bentuk $(f \circ g)(x)$

Fungsi Satu-Satu ...

- Misal $f : A \to B$, f disebut fungsi satu-satu (injektif) jika untuk setiap $x_1, x_2 \in D_f$ dengan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Contoh fungsi satu-satu: fungsi linier, akar, eksponen, dan logaritma.
- Contoh fungsi tidak satu-satu: fungsi kuadrat , trigonometri

Fungsi Satu-Satu

- Dengan membatasi domain, suatu fungsi yang tidak satu-satu dapat menjadi fungsi satu-satu.
- $f(x) = x^2$, jika domainnya $D_f = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ maka akan menjadi fungsi satu-satu.



Invers Fungsi

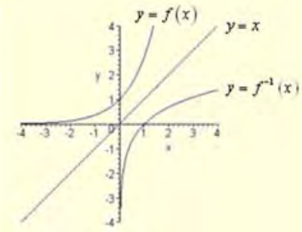
- Invers fungsi f, ditulis f^{-1}, adalah fungsi yang memenuhi $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = I(x) = x$, untuk setiap $x \in D_f$
- Jika f dapat diinverskan dan f^{-1} adalah invers dari f, maka $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
- $D_f = R_{f^{-1}}$ dan $R_f = D_{f^{-1}}$

Langkah Mendapatkan Invers Fungsi

1. Misalkan $y = f(x)$
2. Selesaikan $y = f(x)$ sehingga diperoleh x sebagai fungsi dari y.
3. Tukar kembali variabel x dengan y dan y dengan x dalam fungsi $x = f^{-1}(y)$.

Grafik Invers Fungsi

- Jika grafik fungsi $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ digambarkan dalam satu sumbu koordinat maka grafiknya simetri terhadap garis $y = x$.



Contoh

Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 4x - 6, \quad x \geq -2$.

1. Secara grafik, perlihatkan bahwa fungsi f dapat diinverskan.
2. Tentukan fungsi invers dari fungsi f.
3. Gambarkan f dan f^{-1} dalam satu sistem koordinat.

Latihan

1. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$ fungsi-fungsi berikut
   a. $f(x) = x + 1,\ g(x) = 2e^{x-1}$
   b. $f(x) = \sqrt{3x-7},\ g(x) = \log(x+5)$
2. Tentukan invers fungsi berikut
   a. $f(x) = x^2 + 4x - 1, x < -2$
   b. $f(x) = \sqrt{6-5x}$
   c. $f(x) = 4e^{-8x} - 2$

Kunci Jawaban

1. a. $(f \circ g)(x) = 2e^{x-1} + 1,\ (g \circ f)(x) = 2e^{x}$
   b. $(f \circ g)(x) = \sqrt{3\log(x+5) - 7}$,
   $(g \circ f)(x) = \log\left(\sqrt{3x-7} + 5\right)$
2. a. $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+5}$
   b. $f^{-1}(x) = -\frac{x^2}{5} - \frac{6}{5}$
   c. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)$

Pertemuan 6

Bab 2
Fungsi

Menggambar Grafik Fungsi

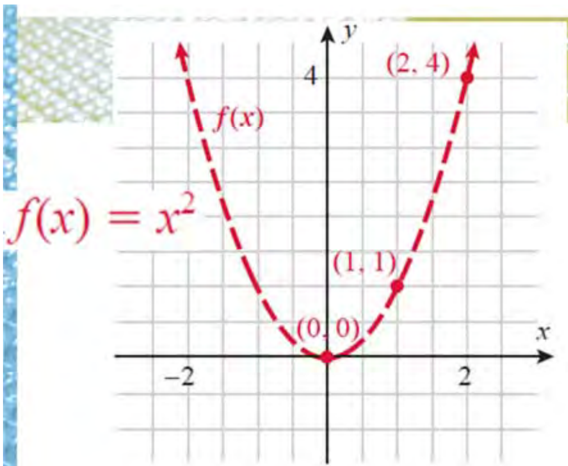
- Cara cepat untuk menggambar fungsi bisa dilakukan dengan mendapatkan gambar grafik dengan pergeseran, pensekalaan, atau pencerminan dari fungsi dasar yang telah diketahui bentuk grafik fungsinya

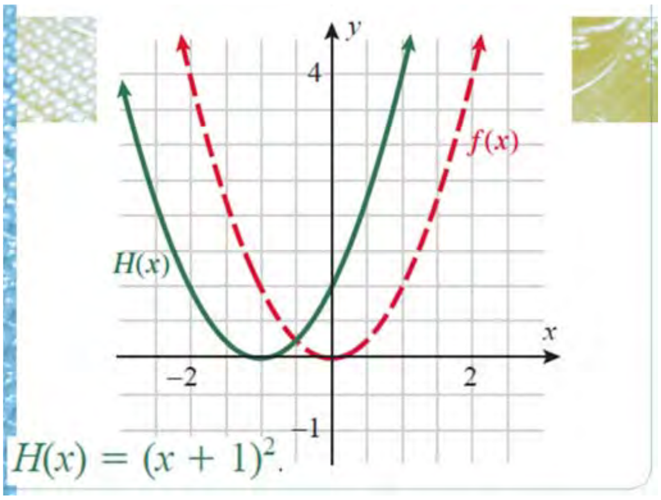
Pergeseran

- Jenis pergeseran ada dua:
  1. Pergeseran horizontal
  2. Pergeseran vertikal
- Misalkan c bilangan positif tertentu dan $f(x)$ fungsi yang gambar grafiknya telah diketahui.

Pergeseran Horisontal

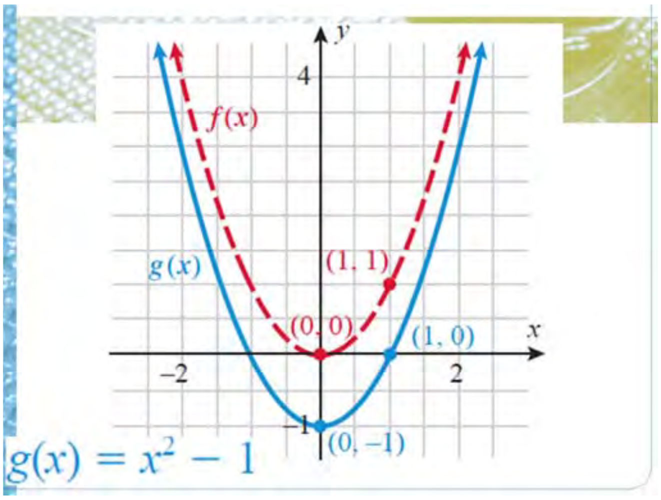
- Menukar x dengan $(x-c)$ akan menggeser grafik fungsi f ke kanan sejauh c satuan.
- Menukar x dengan $(x+c)$ akan menggeser grafik fungsi f ke kiri sejauh c satuan.

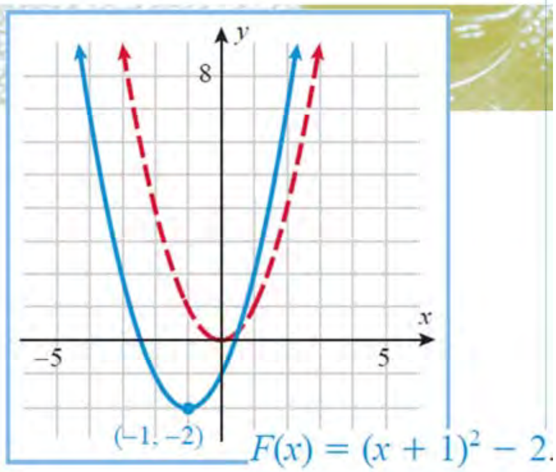




Pergeseran Vertikal

- Menukar $f(x)$ dengan $f(x) + c$ akan menggeser grafik fungsi f ke atas sejauh c satuan.
- Menukar $f(x)$ dengan $f(x) – c$ akan menggeser grafik fungsi f ke bawah sejauh c satuan.





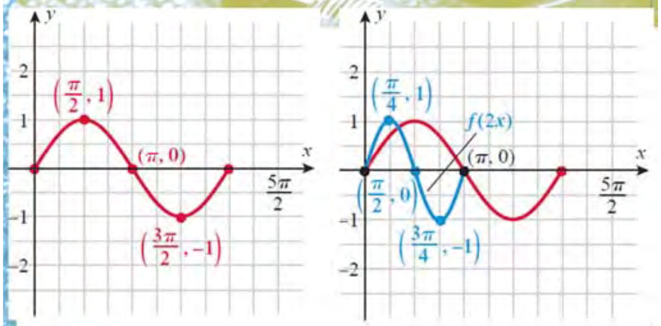
Peskalaan

- Jenis penskalaan ada dua:
  1. Penskalaan horizontal
  2. Penskalaan vertikal
- Misalkan c bilangan positif tertentu dan $f(x)$ fungsi yang gambar grafiknya telah diketahui.

Penskalaan Horisontal

Misal $g(x) = f(kx)$

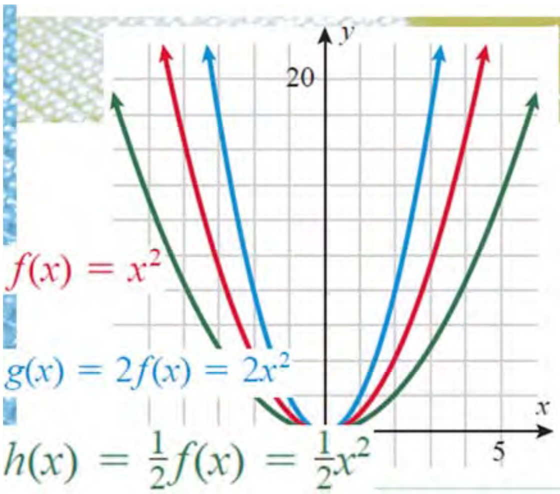
- Jika $k > 1$, grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f yang telah dimampatkan dalam arah sumbu x dengan faktor skala $1/k$.
- Jika $0 < k < 1$, grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f yang telah diregangkan dalam arah sumbu x dengan faktor skala $1/k$.



Penskalaan Vertikal

Misal $g(x) = kf(x)$

- Jika $k > 1$, grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f yang telah diregangkan dalam arah sumbu y dengan faktor skala k.
- Jika $0 < k < 1$, grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f yang dimampatkan dalam arah sumbu y dengan faktor skala k.



x	$f(x)$
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

x	$g(x)$
−2	8
−1	2
0	0
1	2
2	8

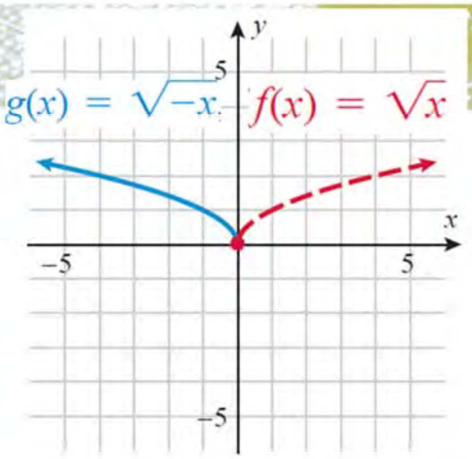
x	$h(x)$
−2	2
−1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2

Pencerminan

- Jenis pencerminan fungsi ada dua
  1. Pencerminan terhadap sumbu y
  2. Pencerminan terhadap sumbu x

Pencerminan terhadap sumbu *y*

- Jika variabel x dalam fungsi $f(x)$ diganti dengan variabel $-x$ maka grafik fungsi $f(-x)$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x)$ dengan mencerminkannya pada sumbu y.

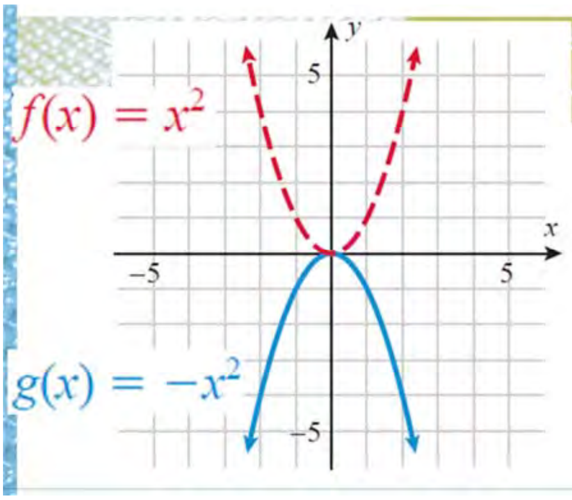


x	$f(x)$
0	0
1	1
4	2
9	3

x	$g(x)$
−9	3
−4	2
−1	1
0	0

Pencerminan terhadap sumbu *x*

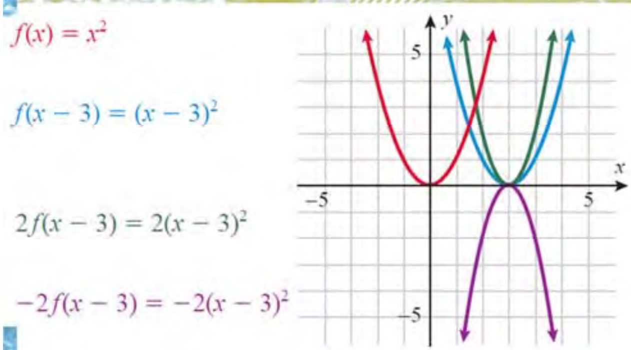
- Jika fungsi $f(x)$ diganti dengan $-f(x)$ maka grafik fungsi $-f(x)$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x)$ dengan mencerminkannya pada sumbu x.



x	$f(x)$
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

x	$g(x)$
−2	−4
−1	−1
0	0
1	−1
2	−4

Sketsa grafik fungsi berikut dengan cara menggabungkan Beberapa transformasi fungsi $H(x) = -2(x-3)^2$.



Transformation	To graph the function...	Draw the graph of f and then...	Description
Horizontal shifts ($c > 0$)	$f(x+c)$ $f(x-c)$	Shift the graph of f to the left c units. Shift the graph of f to the right c units.	Replace x by $x+c$. Replace x by $x-c$.
Vertical shifts ($c > 0$)	$f(x)+c$ $f(x)-c$	Shift the graph of f up c units. Shift the graph of f down c units.	Add c to $f(x)$. Subtract c from $f(x)$.
Reflection about the x-axis	$-f(x)$	Reflect the graph of f about the x-axis.	Multiply $f(x)$ by -1.
Reflection about the y-axis	$f(-x)$	Reflect the graph of f about the y-axis.	Replace x by $-x$.
Vertical stretch	$cf(x)$, where $c > 1$	Vertically stretch the graph of f.	Multiply $f(x)$ by c.
Vertical compression	$cf(x)$, where $0 < c < 1$	Vertically compress the graph of f.	Multiply $f(x)$ by c.
Horizontal stretch	$f(cx)$, where $0 < c < 1$	Horizontally stretch the graph of f.	Replace x by cx.
Horizontal compression	$f(cx)$, where $c > 1$	Horizontally compress the graph of f.	Replace x by cx.

Contoh

Gambarkan grafik $f(x) = -3x^2 + 12x - 6$ dengan cara melakukan pergeseran, penskalaan dan pencerminan dari fungsi yang telah diketahui gambar grafiknya.

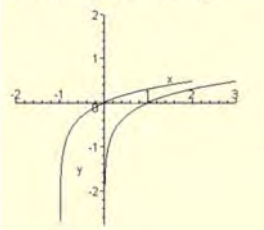
Latihan

Sketsa grafik fungsi berikut dengan pergeseran, penskalaan, dan pencerminan serta tentukan domain dan rangenya

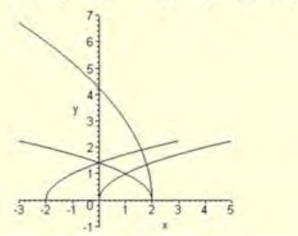
1. $f(x) = \log(x+1)$
2. $f(x) = 3\sqrt{2-x}$
3. $f(x) = x^2 + 4x + 3$
4. $f(x) = e^{2x-4}$
5. $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$

Kunci Jawaban ...

1. $D_f = (-1, \infty)$, $R_f = \mathbb{R}$

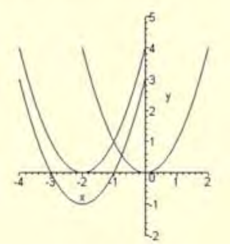


2. $D_f = (-\infty, 2]$, $R_f = [0, \infty)$

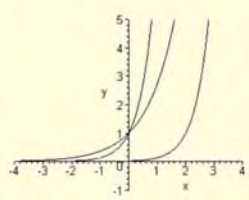


Kunci Jawaban ...

3. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1, \infty)$

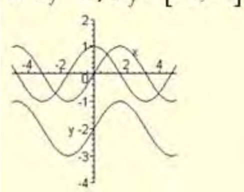


4. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [0, \infty)$



Kunci Jawaban

5. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-3, -1]$



Pertemuan 7

Bab 3
Limit dan Kekontinuan

Definisi Limit …

- Perhatikan nilai $f(x)=\dfrac{2x^2-5x-3}{x-3}$, $x \neq 3$ di sekitar $x=3$ pada tabel berikut

x	2,9	2,99	2,999	…	3	…	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	6,9	6.98	6.998	…	?	…	7.002	7.02	7.2

- Ketika x semakin mendekati ke 3 nilai f semakin mendekati ke 7.
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=7$ atau $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x-3}=7$

Definisi Limit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ berarti jika x semakin dekat ke a, tapi tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ semakin dekat dengan L.

Sifat Limit …

1. Jika q konstanta maka $\lim\limits_{x\to a} q=q$.
2. $\lim\limits_{x\to a} x=a$.

Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ maka

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\pm M$
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)=LM$.

Sifat Limit

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$, asalkan $M\neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}$, $L\geq 0$ untuk n genap.

Example 2 Using the Limit Laws

Evaluate the following limits and justify each step.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Example 3 Finding Limits by Direct Substitution

Evaluate the following limits.

(a) $\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8)$ (b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

Rumus Limit

Misalkan $n \in \aleph$, $\aleph$ himpunan bilangan asli, k dan $c \in \Re$, $p(x)$ adalah polinom maka

1. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$.
2. $\lim_{x \to a} kx = ka$.
3. $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.
4. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$.

Contoh

Hitung:

1. $\lim_{x \to 1} \sqrt{5x^4 + 3x^2 + 2x + 15}$
2. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[5]{2x^2 - 4x + 1}}{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{2x^2}}$

Example 4 Finding a Limit by Canceling a Common Factor

Find $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

Example 5 Finding a Limit by Simplifying

Evaluate $\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

Example 6 **Finding a Limit by Rationalizing**

Find $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

Limit Sepihak

- Jika pengamatan limit dilakukan dari satu sisi saja disebut dengan *limit satu sisi* atau *limit sepihak*.
- Limit sepihak terbagi dua:
  1. limit bagian kanan
  2. limit bagian kiri.

Limit Kanan

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ berarti jika x semakin dekat ke a, tapi tidak sama dengan a dan $x > a$, maka nilai $f(x)$ semakin dekat dengan L.

Limit Kiri

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ berarti jika x semakin dekat ke a, tapi tidak sama dengan a dan $x < a$, maka nilai $f(x)$ semakin dekat dengan L.

Teorema Keujudan Limit

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

jika dan hanya jika

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Contoh

Didefinisikan $f(x) = \begin{cases} 6x^2 - 3x + 1 & ; \quad x < -1 \\ 3 - 3x^2 - 2x^3 & ; \quad x \geq -1 \end{cases}$.

1. Hitung $\lim_{x \to -1^-} f(x)$
2. Hitung $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
3. Periksa apakah $\lim_{x \to -1} f(x)$ ada?

Limit yang Melibatkan Nilai Tak Hingga

- **Dua tipe limit yang melibatkan nilai tak hingga**
  - **Limit tak hingga**
  - **Limit di tak hingga**

Limit Tak Hingga

Limit tak hingga adalah limit suatu fungsi $f(x)$ yang nilainya menuju $+\infty$ atau $-\infty$ ketika x menuju suatu nilai a atau $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Contoh

1. Hitung
   a. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$
   b. $\lim_{x \to -\infty} \left(2x^2 - x - 6\right)$
2. Jika $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$, hitung
   a. $\lim_{x \to 2^-} f(x)$
   b. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$
   c. $\lim_{x \to 2} f(x)$ jika ada

Limit di Tak Hingga

Limit di tak hingga adalah limit suatu fungsi $f(x)$ untuk x menuju $+\infty$ atau $-\infty$, ditulis dengan

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ atau $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

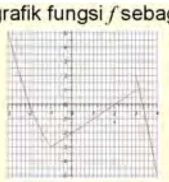
Contoh

Hitung

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n}$, n bilangan asli.
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 + 1}$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt[5]{x^3}}$

Latihan …

1. Diketahui grafik fungsi f sebagai berikut



Dari grafik fungsi f di atas tentukan

a. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$
b. $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
c. $\lim_{x \to -1} f(x)$
d. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$
e. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$
f. $\lim_{x \to 3} f(x)$

Kunci Jawaban …

a. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -3$

b. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -3$

c. $\lim_{x \to -1} f(x) = -3$

d. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$

e. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$

f. $\lim_{x \to 3} f(x) = \text{tidak ada}$

pertemuan 8

Limit dan Kekontinuan

Limit Fungsi Trigonometri

Teorema utama limit fungsi trigonometri $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dengan menggunakan teorema utama diperoleh perhitungan limit di bawah ini

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

Contoh

Hitung

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{4x-\sin 3x}{3x+5\sin 2x}$

Limit Bentuk Tak Tentu

- Bentuk Tak Tentu antara lain

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \pm\infty \mp \infty \qquad 0\pm\infty$$

$$1^{\pm\infty} \qquad 0^0 \qquad \pm\infty^0$$

Penyelesaian Limit Bentuk Tak Tentu

1. Mengubah limit bentuk tak tentu menjadi limit bentuk tentu.
   Hal ini seringkali dilakukan dengan cara:
   a. mengalikan dengan bentuk 1,
   b. menghilangkan faktor penyebab bentuk tak tentu dengan memfaktorkan.
2. Mensubstitusikan nilai x pada limit.

Limit bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$

Limit bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ adalah limit yang berbentuk $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Contoh

Hitung :

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{6x+16}-4}{5x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$

Limit bentuk tak tentu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Limit bentuk tak tentu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ adalah limit yang berbentuk $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$.

Contoh

Hitung :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+1}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt[5]{x^3}}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4^x-4^{-x}}{4^x+4^{-x}}$

Limit bentuk tak tentu $0.\pm\infty$

Limit bentuk tak tentu $0.\pm\infty$ adalah limit yang berbentuk $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, dengan $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$.

Contoh

Hitung $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^5}\csc^2 x$

Limit bentuk tak tentu $\pm\infty \mp \infty$

Limit bentuk tak tentu $\pm\infty \mp \infty$ adalah limit yang berbentuk $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$,

dengan $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ dan

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \mp\infty$.

Contoh

Hitunglah $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

Limit bentuk tak tentu 0^0, $\pm\infty^0$, dan $1^{\pm\infty}$

Materi ini akan dibahas sesudah UTS

Latihan

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ $\quad (54\sqrt{3})$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}$ $\quad (\frac{1}{2})$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5x+25}-5}{x}$ $\quad (\frac{1}{2})$
4. $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^2-2y+2}{y^3+6y^2-11}$ $\quad (0)$
5. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x-\tan 3x}$ $\quad (-1)$

Limit dan Kekontinuan

Definisi kekontinuan

Misalkan f terdefinisi pada suatu selang I yang memuat c. Fungsi f kontinu di c jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Uji kekontinuan fungsi di titik $x = c$

Fungsi f kontinu di c jika memenuhi tiga syarat berikut:

1. $f(c)$ ada.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Contoh

Apakah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin x} & ; \quad x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{x}{\cos x} & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

kontinu di $x = 0$?

Sifat-sifat fungsi kontinu

Misalkan fungsi f dan g kontinu di $x = c$.

- fungsi $f + g$ kontinu di $x = c$
- fungsi kf kontinu di $x = c$, k suatu konstanta
- fungsi fg kontinu di $x = c$
- fungsi f/g kontinu di $x = c$ (asalkan $g(c) \neq 0$)

Sifat-sifat fungsi kontinu ...

- Fungsi polinom *p*(*x*) kontinu di setiap bilangan riil *c*
- Fungsi rasional *r*(*x*) kontinu di daerah definisinya
- Fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ kontinu di setiap bilangan riil *c*
- Jika *g* kontinu di *c* dan *f* kontinu di $g(c)$ maka fungsi komposisi $f \circ g$ kontinu di *c*

Jenis-jenis ketidakkontinuan

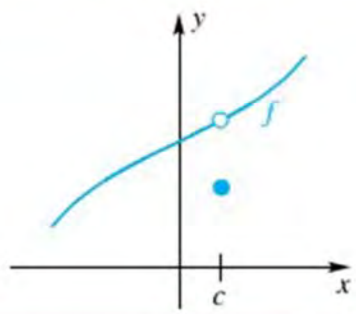
Terdapat tiga jenis ketidakkontinuan:

1. Ketidakkontinuan terhapuskan.
2. Ketidakkontinuan loncat.
3. Ketidakkontinuan tak hingga.

Ketidakkontinuan terhapuskan

Fungsi *f* dikatakan mempunyai ketidakkontinuan terhapuskan di *x* = *a* jika

$\lim_{x \to a} f(x)$ ada tapi $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$



Contoh

Perhatikan fungsi yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan 3x}{2x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}.$$

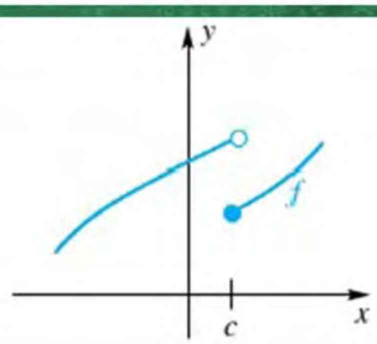
1. Apakah fungsi $f(x)$ kontinu di *x* = 0?
2. Apa nilai $f(0)$ agar $f(x)$ kontinu di *x* = 0 ?

Ketidakkontinuan loncat

Fungsi *f* dikatakan mempunyai ketidakkontinuan loncat di *x* = *a* jika

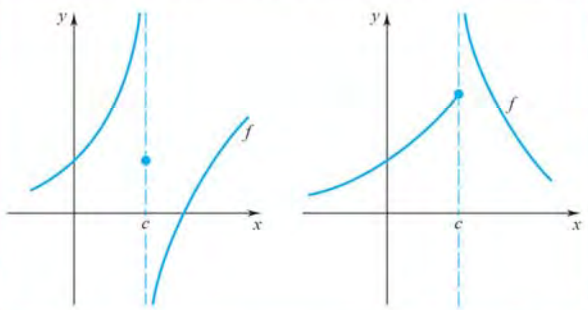
$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$

atau limit kiri fungsi *f* di titik *x* = *a* tidak sama dengan limit kanan fungsi *f* di titik *x* = *a*



Ketidakkontinuan tak hingga

Fungsi *f* dikatakan mempunyai ketidakkontinuan
tak hingga di *x* = *a* jika garis *x* = *a* adalah garis asimtot tegak



Latihan

1. Apakah $f(x)=\begin{cases} 4 & , \ x=1 \\ \dfrac{2x^2-2}{x-1} & , \ x\neq 1 \end{cases}$

kontinu di $x=1$, jelaskan !

($f(x)$ kontinu di $x=1$)

Latihan ...

2. Diketahui :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+8x+6}{2x+2} & , \ x<-1 \\ ax^2-x+2 & , \ x=-1 \\ \dfrac{-x-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+5}} & , \ x>-1 \end{cases}$$

a. Hitung $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ (2)

b. Hitung $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (2)

c. Berapa *a* agar *f*(*x*) kontinu di *x* = - 1 (*a* = -1)

Latihan ...

3. Diketahui :

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & , \ x<-4 \\ 5 & , \ x=-4 \\ x^2+2x-3 & , \ x>-4 \end{cases}$$

a. Hitung *f* (- 4) (5)

b. Hitung $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$ (5)

c. Hitung $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ (5)

d. Apakah *f*(*x*) kontinu di *x*= - 4

(*f*(*x*) kontinu di *x*=-4)

Pertemuan 10

Bab 4
Turunan Fungsi

Pendahuluan

- Turunan adalah fungsi yang merupakan laju perubahan sesuatu terhadap sesuatu.
- Turunan adalah salah satu bagian dari kalkulus yang sangat banyak digunakan di berbagai bidang, misalnya digunakan untuk menghitung kecepatan, percepatan, dll.

Definisi Turunan

Turunan fungsi *f* adalah fungsi yang nilainya di setiap bilangan sembarang *x* di dalam domain *f* diberikan oleh

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(jika limitnya ada)

Notasi Turunan

Notasi yang sering digunakan untuk turunan fungsi $y = f(x)$ adalah:

1. $f'(x)$ atau y' : notasi Lagrange
2. $\frac{df}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$: notasi Leibniz
3. $D_x(f)$: notasi Operator D.

Sifat-sifat Turunan

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$, *c* konstanta
2. $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$, *n* sebarang bilangan real

Jika *u* dan *v* adalah fungsi *x* yang dapat diturunkan dan c adalah konstanta, maka

3. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v)$

Sifat-sifat Turunan …

4. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$, $v \neq 0$

Contoh

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari :

1. a. $y = \frac{\pi}{2}$ b. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
2. a. $y = \sqrt{x}$ b. $\frac{3}{2x\sqrt{x}}$
3. $y = 2x^2 - \frac{5}{x} + x^6$
4. $y = (x^2 - 3)(3x + 4)$
5. $y = \frac{x^3}{x^4 - x^2}$

Rumus-rumus Turunan Fungsi

1. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
5. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
6. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
7. $\frac{d}{dx}({}^a\log x) = \frac{1}{x \ln a}$
8. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
9. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
10. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
11. $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
14. $\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot x = \frac{-1}{1+x^2}$
15. $\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sec x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
16. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc}\csc x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Aturan Rantai

Jika $y=f(u)$ dapat diturunkan, dan $u=g(x)$ juga dapat diturunkan $(y = (f \circ g)(x))$,maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Contoh

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari:

1. $y = \sin x^3$
2. $y = \sin^3 x$
3. $y = \frac{1}{(2x+1)^2}$

Latihan

Tentukan turunan pertama fungsi-fungsi yang diberikan sebagai berikut

1. $y = 4x^3 - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - 3^x + 7$

   $\left(y' = 12x^2 - 5\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} - 3^x \ln 3\right)$

2. $f(m) = 3m^2 \ \ln m$

   $\left(f'(m) = 6m \ln m + 3m\right)$

Latihan ...

3. $y = \dfrac{x}{2x+1}$

$\left(y' = \dfrac{1}{(2x+1)^2} \right)$

4. $y = \dfrac{5e^x - 2x^3}{\sqrt{x}+1}$

$\left(y' = \dfrac{(5e^x - 6x^2)(\sqrt{x}+1) - (5e^x - 2x^3)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{x}+1)^2} \right)$

5. $y = \ln^2(\sin 4x^2)$

$\left(y' = 2\ln(\sin 4x^2)\dfrac{1}{\sin 4x^2}\cos 4x^2 (8x) \right)$

Turunan Fungsi

Turunan Fungsi Implisit

- Fungsi implisit adalah fungsi yang tidak secara jelas membedakan variabel bebas dan variabel tak bebasnya, biasanya dinyatakan dalam bentuk $f(x,y)=0$.
- Untuk mencari turunan fungsi implisit digunakan teknik yang disebut penurunan fungsi implisit

Langkah Mendapatkan Turunan Suatu Fungsi Implisit

1. ubah $f(x,y)=0$ menjadi $y=g(x)$ atau $x=h(y)$ (jika mungkin), maka untuk mendapatkan $\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{dx}{dy}$ tinggal menurunkan $y=g(x)$ atau $x=h(y)$ seperti fungsi eksplisit.

Langkah Mendapatkan Turunan Suatu Fungsi Implisit …

2. jika langkah 1 tidak mungkin dilakukan, maka untuk mendapatkan

   a. $\frac{dy}{dx}$, anggap $y=g(x)$, turunkan $f(x,y)=0$ terhadap x dan y dengan mengingat $y=g(x)$ sehingga setiap menurunkan fungsi y harus dikalikan $\frac{dy}{dx}$ (aturan rantai), sederhanakan.

Langkah Mendapatkan Turunan Suatu Fungsi Implisit …

   b. $\frac{dx}{dy}$, anggap $x=h(y)$, turunkan $f(x,y)=0$ terhadap x dan y dengan mengingat $x=h(y)$ sehingga setiap menurunkan fungsi x harus dikalikan $\frac{dx}{dy}$ (aturan rantai), kemudian sederhanakan

Contoh

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi-fungsi berikut :

1. $2x^3 - y^2 = 4x(y-1)$
2. $x\cos y - y\sin x = 4$

Turunan Fungsi Berbentuk $y = f(x)^{g(x)}$

Langkah-langkah menurunkan fungsi berbentuk $y = [f(x)]^{g(x)}$:

1. Ubah fungsi $y = [f(x)]^{g(x)}$ dengan melogaritma naturalkan kedua ruas sehingga menjadi $\ln y = g(x)\ln(f(x))$.
2. Turunkan fungsi hasil langkah pertama dengan menggunakan teknik penurunan fungsi implisit.

Contoh

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Turunan Tingkat Tinggi

Turunan dari $y = f(x)$ yaitu $y' = \frac{dy}{dx}$ adalah turunan pertama dari y terhadap x. Turunan pertama dari y mungkin juga dapat diturunkan dan turunannya adalah

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

disebut turunan kedua y terhadap x.

Turunan Tingkat Tinggi …

Jika y'' dapat diturunkan maka turunannya adalah

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

disebut turunan ketiga y terhadap x.

Turunan Tingkat Tinggi …

Seterusnya hingga, jika y mempunyai turunan-turunan yang dapat diturunkan maka disebut turunan ke-n dari y terhadap x, untuk n bilangan bulat positif.

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Contoh

Tentukan *y*" dari $y = 7 - x^2 \ln x$

Latihan

1. Tentukan turunan pertama dan kedua dari : $y = 2\sin x + xe^{3x} + 7$

$$\left(\begin{array}{l} y' = 2\cos x + e^{3x} + 3xe^{3x} \\ y'' = -2\sin x + 3e^{3x} + 9xe^{3x} \end{array}\right)$$

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari :

a. $y = \ln^2(1-4x)$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{-8}{(1-4x)}\ln(1-4x)\right)$$

Latihan ...

b. $\begin{cases} y = \cos(5t^2) \\ x = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ $\quad\left(\frac{dy}{dx} = 10t^3 \sin(5t^2)\right)$

c. $x^2y^3 - e^{2x-3y} = 5y + 11x$ $\quad\left(\frac{dy}{dx} = \frac{11 + 2e^{2x-3y}}{x^2 3y^2 + 3e^{2x-3y} - 5}\right)$

d. $x = (\sin y)^x$ $\quad\left(\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y\left(\frac{1}{x} - \ln \sin y\right)}{x\cos y}\right)$

Pertemuan 12

Bab 5
Aplikasi Turunan

Pendahuluan

Banyak masalah-masalah dalam berbagai bidang keilmuan memerlukan turunan sebagai alat untuk mendapat solusi yang signifikan. Contohnya :

Pendahuluan …

- seorang kepala perusahaan, memilih bagaimana kombinasi produksi jenis barangnya untuk mendapat keuntungan terbesar
- seorang dokter ingin mengetahui dosis obat yang diberikan sehingga diperoleh penurunan tekanan darah terbesar

Pendahuluan …

- seorang peneliti lingkungan ingin mengetahui laju membesarnya luas pencemaran polutan di laut tertentu
- seorang peneliti di bidang science ingin mengetahui gradien garis singgung pada kurva yang dimilikinya dan lain sebagainya.

Topik Aplikasi Turunan

Topik-topik yang dibahas terkait aplikasi dari turunan :

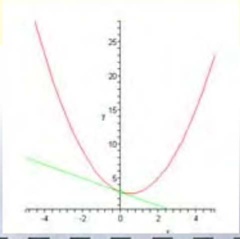
- bagaimana menentukan gradien garis singgung suatu fungsi di satu titik
- bagaimana menghitung limit dengan teorema L'Hopital
- bagaimana mengukur laju perubahan yang berkaitan

Topik Aplikasi Turunan …

- bagaimana menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi
- bagaimana menggambar grafik suatu fungsi.

Garis Singgung

Garis Singgung :
garis yang menyinggung kurva $y = f(x)$ di satu titik tertentu (titik singgung)



Gradien Garis Singgung

Gradien garis singgung suatu kurva $y = f(x)$ di titik $P(a, f(a))$ adalah

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

(jika limitnya ada)

Persamaan Garis Singgung

Persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ dititik $P\ (a, f(a))$ adalah

$$y - f(a) = m(x-a)$$

Garis Normal & Gradien Garis Normal

- Garis yang tegak lurus garis singgung dititik singgung (titik P) pada kurva, dinamakan garis normal atau normal kurva.
- Misalkan m_1 gradien garis normal di P. Dari sifat dua garis saling tegak lurus diketahui $m_1 = -\frac{1}{m}$

Persamaan Garis Normal

Persamaan garis normal pada kurva $y = f(x)$ dititik $P(a, f(a))$ adalah

$$y - f(a) = m_1(x-a)$$

m_1 = gradien garis normal
atau

$$y - f(a) = -\frac{1}{m}(x-a)$$

m = gradien garis singgung

Contoh

1. Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal kurva $y = x^3$ di titik (1,1).
2. Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal kurva $x^2 + y^2 = 1$ di titik $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

Teorema L'Hopital

Misalkan $\lim_{x \to a} \frac{f(a)}{g(a)}$ adalah bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, dan misalkan *f* dan *g* dapat diturunkan pada selang terbuka yang memuat *a*, maka

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

jika limitnya ada atau sama dengan $\pm\infty$.

Teorema L'Hopital …

Untuk bentuk-bentuk tak tentu selain $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ harus diubah terlebih dahulu bentuknya sehingga jika dilakukan subtitusi langsung didapatkan bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Contoh

Hitung : 1. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2 - 1}$.

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$

L'Hopital untuk bentuk $(0^0, \pm\infty^0, 1^{\pm\infty})$

Untuk menyelesaikan tiga bentuk tak tentu yang terakhir $(0^0, \pm\infty^0, 1^{\pm\infty})$ dengan menggunakan teorema L'Hopital dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. dari sifat eksponensial, $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}}$
2. limitkan kedua ruas, diperoleh $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}}$
3. dari sifat limit didapat $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} \ln f(x)^{g(x)}}$

4. dari sifat logaritma natural didapat

$$e^{\lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

5.selesaikan $\lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)$ mempergunakan perhitungan di bab 3 atau teorema L'Hopital.

Contoh

Hitung $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

Latihan

1. Diketahui $f(x) = x\sqrt{x} + 2x$.

Tentukan :

a. Persamaan garis singgung di titik (1 , 3)

$(y = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2})$

b. Persamaan garis normal di titik (1 , 3)

$(y = -\frac{2}{7}x + \frac{23}{7})$

Latihan ...

2. Dengan menggunakan dalil L'hopital hitung :

a. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sin(5\pi x) + x - 3/2}{2x-1}$ $(\frac{1}{2})$

b. $\lim_{x\to 1} \frac{2x + \ln x - 2}{2x^2 - 2x}$ $(\frac{3}{2})$

c. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x - 4}{x}$ (0)

...Latihan

d. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^{2x}$ (e^{-1})

e. $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}$ (0)

Bab 5

Aplikasi Turunan

Laju Perubahan Yang Berkaitan

Menentukan laju perubahan yang tidak diketahui dengan cara mengkaitkan laju perubahan tersebut dengan variabel lain yang nilai dan turunannya dapat diketahui

x dan y berkaitan

Laju perubahan x dan y berkaitan

$$y = 2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$$

Contoh

Misalkan variabel x dan y dapat diturunkan terhadap t dan mereka dikaitkan oleh persamaan

$$y = x^2 + 3.$$

Saat $x = 1$, $dx/dt = 2$. Tentukan dy/dt saat $x = 1$.

Solusi: $y = x^2 + 3$

$$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3]$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Sehingga

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2)$$

$$= 4.$$

Laju Perubahan Yang Berkaitan ...

Berikut ini adalah langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan laju perubahan yang berkaitan.

1. Sketsa gambar yang berhubungan dengan permasalahan, berikan variabel dan konstantanya
2. Tuliskan informasi numerik yang diberikan.

Laju Perubahan Yang Berkaitan ...

3. Tuliskan apa yang akan dicari (nyatakan dalam turunan).
4. Tuliskan persamaan yang menghubungkan variabel yang diberikan.

Laju Perubahan Yang Berkaitan ...

5. Turunkan persamaan langkah 4, sesuaikan dengan langkah 3
6. Substitusikan informasi numerik yang diketahui

Laju Perubahan Yang Berkaitan ...

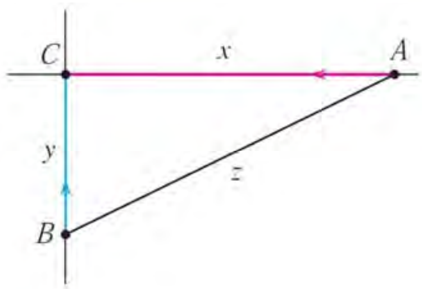
Selain langkah di atas yang perlu diperhatikan adalah laju perubahan dinyatakan dengan turunan,

- jika kuantitas suatu variabel bertambah maka turunan variabel tersebut bernilai positif,
- jika kuantitas suatu variabel berkurang maka turunan variabel tersebut bernilai negatif.

Contoh

Mobil A berjalan ke arah barat dengan laju 50 mil/jam dan mobil B berjalan ke arah utara dengan laju 60 mil/jam. Kedua mobil tersebut menuju ke suatu persimpangan. Pada laju berapa mobil tersebut mendekat satu sama lain saat mobil A 0,3 mil dan mobil B 0,4 mil dari persimpangan?

Solusi:



Misalkan x menyatakan jarak dari titik A ke titik C
y menyatakan jarak dari titik B ke titik C
z menyatakan jarak dari titik A ke titik B

Dari Teorema Phitagoras

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Turunan terhadap t menghasilkan

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Dari yang diketahui dapat diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ mil/jam}$$

Jadi mobil-mobil tersebut saling mendekat satu sama lain dengan laju 78 mil/jam.

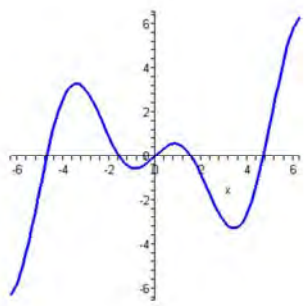
Contoh

Sebuah bak air berbentuk tabung dengan tinggi 10 cm dan jari-jari alasnya 5 cm. Jika mula-mula berisi penuh air, kemudian air dikeluarkan dengan laju 2 cm^3/menit, berapa laju turunnya ketinggian air di dalam bak pada saat ketinggian air 5 cm.

Maksimum dan Minimum Fungsi

Grafik atau kurva dari suatu fungsi mungkin fluktuatif atau menunjukkan gejala turun naik. Jadi mungkin kita dapatkan nilai maksimum dan minimum dalam sebuah kurva fungsi. Definisi dari nilai maksimum dan minimum adalah sebagai berikut:

Maksimum dan Minimum Fungsi ...



Nilai Ekstrim

Misalkan fungsi f mempunyai domain selang I dan titik $c \in I$.

a. Nilai $f(c)$ disebut nilai maksimum jika $f(c) \geq f(x)$, setiap $x \in I$.

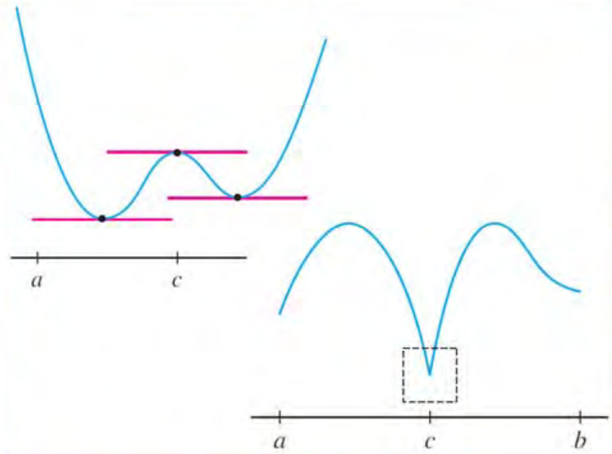
b. Nilai $f(c)$ disebut nilai minimum jika $f(c) \leq f(x)$, setiap $x \in I$.

c. Nilai $f(c)$ disebut nilai ekstrim fungsi f di I jika $f(c)$ nilai maksimum atau nilai minimum.

Titik Kritis

Misalkan fungsi f didefinisikan pada selang I yang memuat c. Titik c disebut titik kritis dari fungsi f jika memenuhi salah satu berikut ini:

1. Titik ujung selang I.
2. Titik stasioner dari fungsi f (yaitu $f'(c)=0$).
3. Titik singular dari fungsi f (yaitu $f'(c)$ tidak ada).



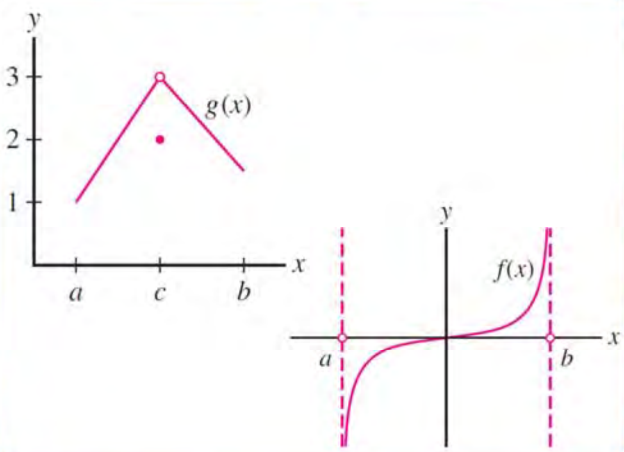
Teorema Nilai Ekstrim…

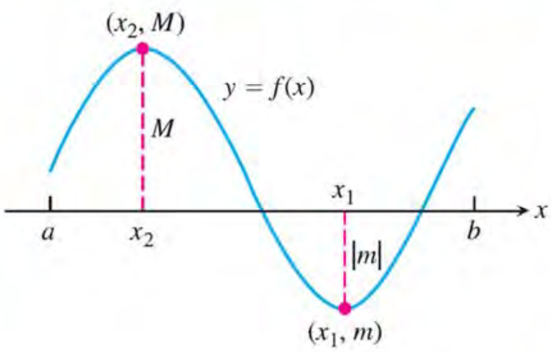
Misalkan fungsi f didefinisikan pada selang I yang memuat c. Jika f (c) nilai ekstrim, maka c haruslah berupa suatu titik kritis.

Jaminan keujudan nilai estrim terdapat pada teorema berikut ini.

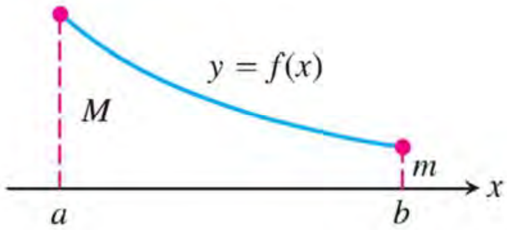
Teorema Nilai Ekstrim

Jika fungsi f kontinu pada selang tutup I = [a,b] maka f mencapai nilai maksimum dan minimum pada suatu titik di selang tersebut.

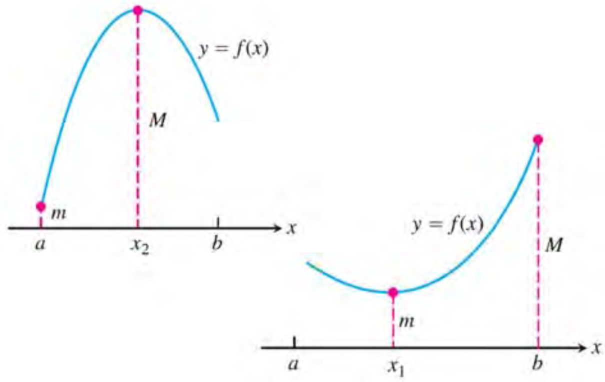




Maksimum & minimum di tengah kurva



Maksimum & minimum pada titik ujung



Salah satu di antara maksimum dan minimum di titik tengah dan yang lainnya di titik ujung.

Menentukan Nilai Ekstrim Pada Selang Tertutup

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang tutup $I = [a,b]$. Menentukan nilai ekstrim f dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan semua titik kritis dari fungsi f pada selang I.
2. Hitung semua nilai $f(x)$, dengan x titik kritis.

Menentukan Nilai Ekstrim Pada Selang Tertutup ...

3. Nilai fungsi yang terbesar dari langkah 2 disebut nilai maksimum. Nilai fungsi yang terkecil dari langkah 2 disebut nilai minimum.

Contoh

1. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $s(t) = \cos 2t + 4\cos t$, dengan $I = [0, \frac{3}{2}\pi]$.

Contoh ...

2. Seorang peternak mempunyai kawat 80 meter. Peternak tersebut akan membuat tiga kandang identik yang dipagari oleh kawat. Berapa lebar dan panjang pagar harus dibuat agar luas daerah yang dipagari maksimum ?

Latihan

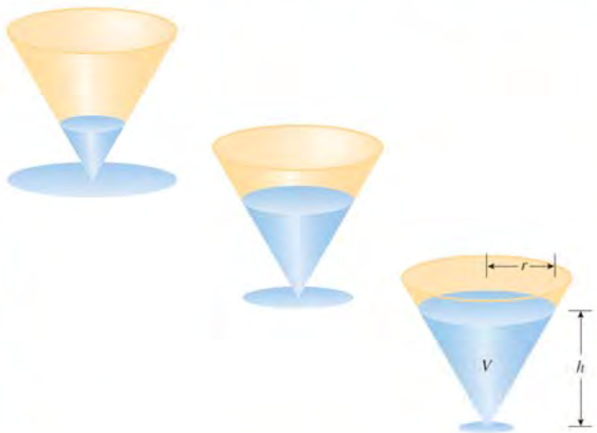
1. Sebuah balon kecil dilepas pada jarak 150 dari seorang pengamat yang berdiri di tanah. Jika balon naik secara lurus ke atas dengan laju 8 feet perdetik, seberapa cepat jarak antara pengamat dan balon bertambah pada waktu balon pada ketinggian 50 feet?

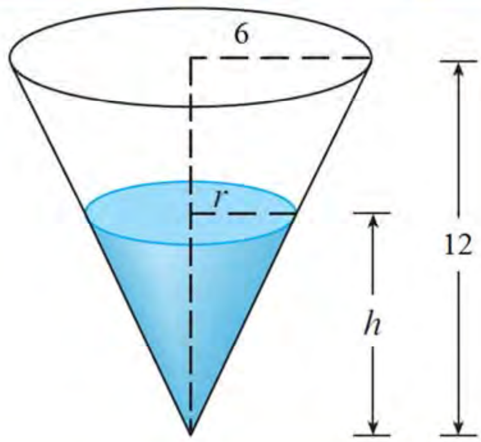
($\frac{8}{\sqrt{10}}$ feet per detik)

Latihan ...

2. Air dituangkan ke dalam bak berbentuk kerucut dengan laju 8 feet kubik per menit. Jika tinggi bak adalah 12 feet dan jari-jari permukaan atas adalah 6 feet, seberapa cepat permukaan air naik ketika kedalaman air adalah 4 feet?

($\frac{2}{\pi}$ feet per menit)





Latihan ...

3. Rusuk sebuah kubus bertambah panjang dengan laju 3 inci/detik, seberapa cepat volume kubus bertambah pada saat panjang rusuk 12 inci ?

($1296 \text{ inci}^3/\text{det}$)

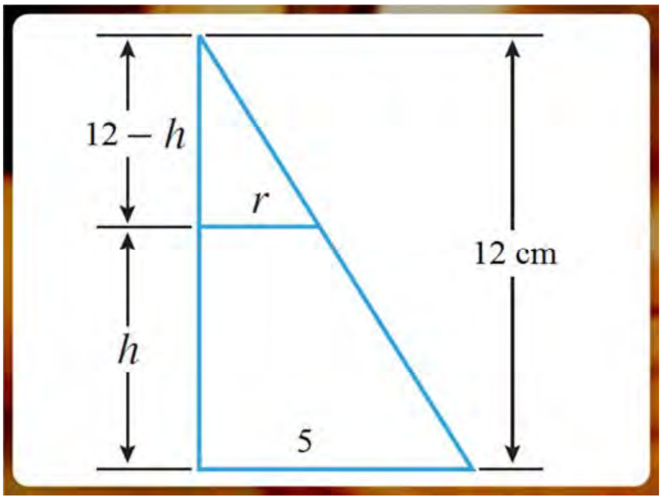
Latihan ...

4. Tentukan dua bilangan yang hasil kalinya -16 dan jumlah kuadratnya minimum. (-4 dan 4)

Latihan ...

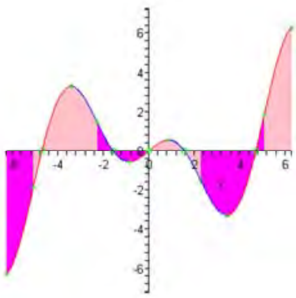
5. Tentukan ukuran silinder tegak dengan volume sebesar mungkin yang dapat dibuat di dalam suatu kerucut lingkaran tegak yang jari-jarinya 5 cm dan tingginya 12 cm.

$\left(V_s = \frac{400}{9}\pi \quad , r_s = \frac{10}{3} \quad h_s = 4\right)$



Bab 5
Aplikasi Turunan

Menggambar Grafik



Definisi Kemonotonan

Misalkan fungsi *f* terdefinisi pada selang *I*.

1. Fungsi *f* naik pada selang *I* jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam *I* berlaku $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Definisi Kemonotonan …

2. Fungsi *f* turun pada selang *I* jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam *I* berlaku $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
3. Fungsi *f* monoton pada selang *I* jika fungsi tersebut naik atau turun pada selang *I*.

Teorema Kemonotonan

Misalkan fungsi *f* terdefinisi pada selang buka *I* dan dapat diturunkan pada setiap titik *x* dalam selang *I*.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik *x* dalam selang *I* maka *f* naik pada selang *I*.
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik *x* dalam selang *I* maka *f* turun pada selang *I*.

Definisi Kecekungan

Misalkan fungsi f dapat diturunkan pada selang buka I.

1. Grafik fungsi f cekung ke atas pada selang I jika f' naik pada selang I.
2. Grafik fungsi f cekung ke bawah pada selang I jika f' turun pada selang I.

Teorema Kecekungan

Misalkan fungsi f dapat diturunkan dua kali pada selang buka I.

1. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua titik x dalam selang I maka f cekung ke atas pada I.
2. Jika $f''(x) < 0$ untuk semua titik x dalam selang I maka f cekung ke bawah pada I.

f'' / f'	+ Cekung ke atas	− Cekung ke bawah
+ Naik	+ +	+ −
− Turun	− +	− −

Teorema Nilai Ekstrim pada Selang

Misalkan fungsi f kontinu di titik $x = c$ pada selang buka (a,b) yang memuat titik kritis c.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c,b) maka $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada selang buka (a,b).

Teorema Nilai Ekstrim pada Selang …

2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c,b) maka $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada selang buka (a,b).

Definisi Titik Belok

Misalkan fungsi f kontinu pada selang buka (a,b) yang memuat titik c. Titik $(c, f(c))$ disebut titik belok dari grafik f jika f cekung ke atas untuk semua x dalam (a,c) dan f cekung ke bawah untuk semua x dalam (c,b), atau sebaliknya.

Langkah-langkah Menggambar Grafik

1. Menentukan domain
2. Menentukan $f(x)$ dan $f'(x)$
3. Menentukan semua nilai x sehingga $f(x) = 0$ dan $f'(x)$ = tidak ada
4. Menentukan semua nilai x sehingga $f''(x) = 0$ dan $f''(x)$ = tidak ada

Langkah-langkah Menggambar Grafik ...

5. Buat tabel untuk menentukan interval dimana fungsinya naik, turun, cekung ke atas, cekung ke bawah, maksimum, minimum
6. Gambar grafik dengan bantuan langkah 5.

Contoh

Tentukan sketsa grafik fungsi $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ dengan terlebih dahulu menentukan dimana grafik nya naik, turun, cekung ke atas dan cekung ke bawah.

Latihan

Sketsa grafik fungsi berikut dengan terlebih dahulu menentukan titik ekstrim dari *f*, titik belok, selang di mana *f* naik/turun dan *f* cekung atas/bawah

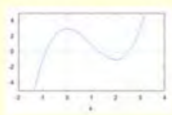
1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
2. $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$
3. $G(x) = (x-1)^4$

Latihan ...

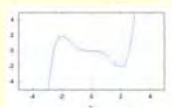
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 10$
5. $F(s) = \dfrac{4s^4 - 8s^2 - 12}{3}$

Kunci

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

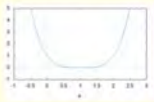


2. $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$

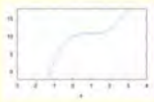


Kunci …

3. $G(x)=(x-1)^4$



4. $f(x)=x^3-3x^2+3x+10$



Kunci

5. $F(s)=\dfrac{4s^4-8s^2-12}{3}$