KNM XIX
Universitas Brawijaya Malang, 24-26 Juli 2018

KARAKTERISASI DIMENSI METRIK CAMPURAN GRAF AMALGAMASI LINGKARAN

Hazrul Iswadi

Departemen MIPA dan Prodi Magister Teknik Industri, Fakultas Teknik, Universitas Surabaya, Indonesia
e-mail: hazrul_iswadi@staff.ubaya.ac.id

Kata Kunci: dimensi metrik, dimensi metrik campuran, graf amalgamasi.

Abstrak. *Misalkan* $G = (V, E)$ *adalah graf dengan himpunan titik* V *dan himpunan garis* E*.Misalkan* $W = w_1, w_2, \cdots, w_k \in V$ *adalah himpunan titik terurut. Vektor jarak* $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k))$ *didefinisikan sebagai representasi campuran dari* $v \in E \cup V$ *terhadap* W*, dengan* $d(v, w_j))$ *adalah jarak campuran dari unsur* v *(bisa titik atau garis) di* G *dengan titik* $w_j \in W$*. Himpunan* W *disebut himpunan resolving campurandari* G *jika setiap titik dan sisi di* G *mempunyai representasi campuran yang berbeda terhadap* W*. Himpunan resolving campuran* G *yang memuat jumlah titik minimal disebut himpunan resolving campuran minimum atau basis campurandari* G*. Dimensi metrik campuran dari graf* G*, dinotasikan dengan* $mdim(G)$*, adalah jumlah titik dalam basis campuran dari* G*.Karakterisasi dari dimensi metrik campuran dari graf yang diperoleh dengan merekatkan satu titik pada himpunan graf yang berbentuk lingkaran menjadi satu titik atau yang disebut juga graf amalgamasi lingkaran memiliki sifat-sifat yang hampir sama dengan dimensi metriknya.*

1 PENDAHULUAN

Ide tentang dimensi metrik diperkenalkan pertama kali oleh Slater [7] dan Harary dan Melter [3] secara terpisah. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan sederhana dengan himpunan titik V dan himpunan garis E. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\} \subset V$ adalah himpunan titik terurut di graf G. Representasi $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k))$ didefinisikan sebagai *representasi* dari $v \in V$ terhadap W, dengan $d(v, w_j))$ adalah *jarak* dari titik v di G dengan titik $w_j \in W$ dan $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Himpunan W disebut *himpunan resolving* dari G jika setiap titik atau sisi di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap W. Himpunan resolving G yang memuat jumlah titik minimal disebut *himpunan resolving minimum* atau *basis* dari G. *Dimensi metrik* dari graf G, dinotasikan dengan $dim(G)$, adalah jumlah titik dalam basis dari G.

Beberapa peneliti sudah menerapkan konsep dimensi metrik di atas untuk beberapa kelas graf yaitu dimensi metrik graf join dan kasil kali Kartesius oleh Chartrand dkk [2]. Chartrand dkk juga mengkarekterisasi graf yang mempunyai metrik dimensi 1, $n-1$, dan $n-2$ dan menentukan dimensi metrik graf dasar seperi lintasan, lingkaran, graf lengkap, dan pohon. Kemudian, Iswadi dkk [4] menentukan dimensi metrik graf amalgamasi lingkaran.

Kelenc dkk [6] menggunakan ide yang similar dengan konsep dimensi metrik pada himpunan sisi di G. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\} \subset V$ adalah himpunan titik terurut di graf G. Representasi dari sisi e di G terhadap W adalah $r(e|W) = (d(e, w_1), d(e, w_2), \cdots, d(e, w_k))$, dengan jarak antara titik v di G dengan sisi $e = uw$ adalah $d(v, e) = min\{d(v, u), d(v, w)\}$. Himpunan resolving sisi, himpunan resolving sisi minimum atau basis sisi, dan dimensi metrik sisi adalah konsep berikutnya yang similar dengan pendefinisian untuk himpunan resolving, himpunan resolving minimum atau basis, dan dimensi metrik yang telah didefinisikan oleh Harary dkk di atas. Notasi untuk dimensi metrik sisi adalah $edim(G)$.

Kemudian, Kelenc dkk [5] memperumum ide dimensi metrik dan dimensi metrik sisi menjadi dimensi metrik campuran yang bertujuan agar himpunan resolving juga dapat membedakan titik sekaligus sisi. Pada ide dimensi metrik campuran, titik v pada representasi $r(v|W)$ di atas dapat berupa titik atau sisi ($r \in E \cup V$). Sehingga terminologi representasi, jarak, himpunan resolving, himpunan resolving minimum, basis, dan dimensi metrik dalam konsep dimensi metrik campuran secara berturut-turut diganti dengan representasi campuran, jarak campuran, himpunan resolving campuran, himpunan resolving minimum campuran, basis campuran, dan dimensi metrik campuran.

Salah satu kelas graf yang didapatkan dari graf sederhana seperti lingkaran adalah graf amalgamasi lingkaran. Graf amalgamasi lingkaran adalah graf yang diperoleh dari himpunan graf lingkaran dengan cara merekatkan satu titik tertentu pada setiap lingkaran menjadi satu titik. Karakterisasi dimensi metrik dari graf amalgamasi lingkaran sudah diteliti di Iswadi dkk [4]. Pada paper ini akan diteliti karakterisasi dimensi metrik sisi dan dimensi metrik campuran untuk graf amalgamasi lingkaran.

2 DIMENSI METRIK GRAF AMALGAMASI LINGKARAN

Definisi graf amalgamasi (dalam hal ini amalgamasi titik) dari graf-graf lingkaran sebagai berikut:

Definisi 1 *Misalkan $\{C_{n_i}\}$ adalah koleksi berhingga t buah graf lingkaran C_{n_i} dengan jumlah titik sebanyak $n_i \geq 3$ dan tiap graf lingkaran C_{n_i} mempunyai satu titik v_{oi} yang disebut dengan titik terminal. Graf amalgamasi $Amal\{C_{n_i}, v_{oi}\}$ dibentuk dengan mengambil semua C_{n_i} dan mengidentikkan titik-titik terminal mereka.*

Karena struktur lingkaran yang simetris, graf amalgamasi Amal$\{C_{n_i}, v_{oi}\}$ tidak tergantung pemilihan titik terminal dalam lingkaran. Sehingga notasi graf amalgamasi Amal$\{C_{n_i}, v_{oi}\}$ dapat disingkat menjadi Amal$\{C_{n_i}\}$ saja. Setiap lingkaran C_{n_i} dalam Amal$\{C_{n_i}\}$ disebut dengan *daun ke-i*. Lintasan yang diperoleh di *daun ke-i* dengan cara menghapus titik terminal disebut *lintasan ke-i tanpa titik terminal* P_{n_i} (untuk selanjutnya disebut saja lintasan P_{n_i}).

Untuk mempermudah pembahasan berikutnya, berikut ini adalah pelabelan titik dan sisi untuk daun ke-*i* C_{n_i}. Untuk n_i genap, misalkan $n_i = 2k_i+2$. Titik yang berjarak diagonal dari titik terminal v_{oi} diberi label u_i, sedangkan titik lain pada bagian kiri dari titik terminal v_{oi} searah jarum jam diberi label berturut-turut

$$v_1, \cdots, v_{k_i}$$

dan pada bagian kanan dari titik terminal v_{oi} berlawanan arah jarum jam diberi label berturut-turut

$$u_1, \cdots, u_{k_i}$$

Dengan menggunakan label di atas maka daun ke-i dari Amal$\{C_{n_i}\}$ mempunyai label searah jarum jam sebagai berikut

$$v_{oi}, v_1, \cdots, v_{k_i}, u_i, u_{k_i}, \cdots, u_1, v_{oi}$$

sedangkan lintasan P_{n_i} mempunyai label searah jarum jam sebagai berikut

$$v_1, \cdots, v_{k_i}, u_i, u_{k_i}, \cdots, u_1$$

Untuk n_i ganjil, misalkan $n_i = 2k_i + 1$. Semua pelabelan similar dengan pelabelan dengan n_i genap, dengan pengecualian tidak adanya titik u_i. Jika dalam pembahasan dibutuhkan pelabelan untuk dua daun ke-i dan daun ke-j sekaligus maka cara pelabelan dilakukan similar dengan simbol v dan u (kecuali v_{oi}) pada daun ke-j diganti berturut-turut dengan simbol x dan y.

Iswadi dkk [4] memperlihatkan bahwa dimensi metrik dari graf amalgamasi Amal$\{C_{n_i}\}$ bergantung pada banyaknya lingkaran genap atau gasal yang dimiliki himpunan pembentuk graf amalgamasi, seperti tertera pada teorema berikut.

Teorema 1 *Jika graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ adalah amalgamasi dari t buah lingkaran dengan t_1 adalah jumlah lingkaran ganjil dan t_2 adalah jumlah lingkaran genap maka dimensi metrik dari Amal$\{C_{n_i}\}$ adalah*

$$dim(Amal\{C_{n_i}\}) = \begin{cases} t_1, & t_2 = 0; \\ t_1 + 2t_2 - 1, & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Salah satu cara untuk memilih himpunan yang memenuhi basis di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ adalah titik-titik basis ditempatkan di posisi yang berjarak k_i dari titik terminal v_{oi}. Pada lingkaran C_{n_i} ganjil di pilih satu titik yang bersifat di atas, sedangkan pada lingkaran C_{n_i} genap dipilih masing-masing dua titik yang bersifat di atas, kecuali satu lingkaran C_{n_i} genap yang hanya memilih satu titik.

3 DIMENSI METRIK SISI DAN CAMPURAN GRAF AMALGAMASI LINGKARAN

Lema berikut ini menyatakan bahwa jumlah titik resolving sisi pada gabungan lintasan P_{n_i} dan P_{n_j} harus lebih dari 2.

Lema 1 *Jika W adalah himpunan resolving sisi dari graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ maka $|W \cup \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\}| > 2$ untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \cdots, t\}$.*

Bukti: Andaikan $|W \cup \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\}| \leq 2$. Jelas bahwa kalau $|W \cup \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\}| \leq 1$ maka terdapat dua sisi yang menempel dengan titik terminal v_{oi} di salah satu lintasan P_{n_i} atau P_{n_j} yang tidak memuat titik resolving sisi yang memiliki jarak yang sama dengan semua titik resolving sisi di W. Hal ini bertentangan dengan sifat himpunan resolving. Sekarang misalkan $|W \cup \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\}| = 2$. Jika kedua-dua titik dari himpunan $W \cup \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\}$ di salah satu dari P_{n_i} atau P_{n_j} maka dengan memakai argumen sebelumnya akan diperoleh dua sisi yang berjarak sama dengan semua titik di himpunan resolving sisi W. Misalkan $W \cup \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\} = \{a, b\}$, dengan $a \in P_{n_i}$ dan $b \in P_{n_j}$. Titik a dan b tidak boleh berada pada titik berseberangan diagonal dari titik v_{oi}. Jika $a = u_i$ maka dua sisi $v_{oi}v_1$ dan $v_{oi}u_1$ akan berjarak sama dengan dengan titik a dan semua titik lain di W. Hal ini bertentangan dengan W himpunan resolving. Demikian juga halnya dengan b yang tidak boleh berada pada posisi y_j di P_{n_j}. Berikutnya tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $a \in \{v_1, \cdots, v_{k_i}\} \subset P_{n_i}$ dan $b \in \{x_1, \cdots, x_{k_j}\} \subset P_{n_j}$. Akan diperoleh $d(v_1v_{oi}, a) = d(x_1v_{oi}, a)$, $d(v_1v_{oi}, b) = d(x_1v_{oi}, b)$ dan $d(v_1v_{oi}, w) = d(x_1v_{oi}, w)$ untuk setiap w di $W - \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\}$. Hal ini bertentangan dengan W himpunan resolving. Jadi haruslah $|W \cup \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\}| > 2$.■

Dengan menggunakan Lema 1, diperoleh nilai dimensi metrik sisi dari graf amalgamasi lingkaran pada teorema berikut.

Teorema 2 *Jika graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ adalah amalgamasi dari $t \geq 2$ buah lingkaran maka dimensi metrik sisi Amal$\{C_{n_i}\}$ adalah edim(Amal$\{C_{n_i}\}$) = $2t - 1$.*

Bukti: Misalkan W adalah himpunan resolving sisi dari graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$. Berdasarkan Lema 1, $|W \cup \{P_{n_i} \cap P_{n_j}\}| > 2$ untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \cdots, t\}$. Sehingga $W \geq 2t-1$. Dari sifat basis sisi sebagai himpunan resolving sisi minimum dan dimensi metrik sisi sebagai kardinalitas dari basis sisi maka edim(Amal$\{C_{n_i}\}$) $\geq 2t-1$. Berikutnya akan ditunjukkan dapat dipilih himpunan tertentu subset dari Amal$\{C_{n_i}\}$ yang merupakan himpunan resolving sisi dan memiliki kardinalitas $2t - 1$. Kalau hal ini dapat ditunjukkan maka edim(Amal$\{C_{n_i}\}$) $= 2t - 1$. Kumpulkan semua titik di P_{n_i} yang berjarak k_i dari titik v_{oi}, untuk setiap $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$. Terdapat 2 titik untuk setiap P_{n_i} yang berjarak k_i dari titik v_{oi}. Nyatakan kumpulan titik tersebut dengan himpunan U. Jadi $U = \{u \in P_{n_i} | u$ berjarak k_i dari titik $v_{oi}\}$ dengan $|U| = 2t$. Misalkan $W = U - \{u\}$ untuk sembarang $u \in U$. Untuk setiap dua sisi $e_i \in C_{n_i}$ dan $e_j \in C_{n_j}$, sisi e_i selalu berjarak lebih dekat ke salah satu titik $u \in W \cap P_{n_i}$ dibandingkan ke titik $x \in W \cap P_{n_j}$, demikian sebaliknya. Jadi $r(e_i|W) \neq r(e_j|W)$, untuk setiap $i \neq j \in \{1, \cdots, t\}$. Untuk setiap dua sisi $e_s, e_t \in C_{n_i}$. Terbagi dalam dua kasus. Kasus pertama adalah $|W \cup P_{n_i}| = 2$. Untuk kasus ini, diperoleh $d(e_s, v) \neq d(e_t, v)$ untuk setiap $v \in W \cup P_{n_i}$. Kasus kedua adalah $|W \cup P_{n_i}| = 1$. Untuk kasus ini, bisa dimungkinkan terdapat $d(e_s, v) = d(e_t, v)$, dengan $v \in W \cup P_{n_i}$, tapi hal itu berakibat $d(e_s, w) \neq d(e_t, w)$ untuk $w \in W \cup P_{n_j}$. Jadi setiap sepasang dua sisi di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ dibedakan himpunan titik W. Jadi W adalah himpunan resolving sisi di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$. Jadi edim(Amal$\{C_{n_i}\}$) = $2t - 1$. ■

Lema berikut ini menyatakan bahwa jumlah titik resolving campuran suatu lintasan P_{n_i} harus lebih dari 1.

Lema 2 *Jika W adalah himpunan resolving campuran dari graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ maka $|W \cup P_{n_i}| \geq 2$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$.*

Bukti: Andaikan $|W \cup P_{n_i}| < 2$. Jelas bahwa kalau $|W \cup P_{n_i}| = 0$ maka terdapat dua titik v_1, u_1 di P_{n_i} yang berjarak sama dengan setiap titik $w \in W$ yang berada di luar P_{n_i}. Hal ini bertentangan dengan W himpunan resolving. Sekarang misalkan $|W \cup P_{n_i}| = 1$. Misalkan w adalah titik pada himpunan resolving W yang berada di P_{n_i}. Jika $w = u_i$ maka $d(v_1, w) = (u_1, w)$ dan juga $d(v_1, v) = (u_1, v)$ untuk setiap titik lain $v \in W$. Hal ini juga bertentangan dengan W himpunan resolving. Berikutnya tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $w \in \{v_1, \cdots, v_{k_i}\}$. Diperoleh $d(v_{oi}, w) = d(u_1 v_{oi}, w)$, dengan $u_1 v_{oi}$ adalah sisi yang menghubungkan titik u_1 dengan titik v_{oi}. Kemudian juga diperoleh $d(v_{oi}, v) = d(u_1 v_{oi}, v)$ untuk setiap titik lain $v \in W$. Sehingga diperoleh lagi jarak dari titik v_{oi} dan sisi $u_1 v_{oi}$ ke semua titik w di W selalu sama. Hal ini bertentangan dengan W himpunan resolving. Jadi haruslah $|W \cup P_{n_i}| \geq 2$. ■

Dengan menggunakan Lema 2, diperoleh nilai dimensi metrik campuran dari graf amalgamasi lingkaran pada teorema berikut.

Teorema 3 *Jika graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ adalah amalgamasi dari $t \geq 2$ buah lingkaran maka dimensi metrik campuran Amal$\{C_{n_i}\}$ adalah mdim(Amal$\{C_{n_i}\}$) = $2t$.*

Bukti: Misalkan W adalah himpunan resolving campuran dari graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$. Berdasarkan Lema 2, $|W \cup P_{n_i}| \geq 2$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$. Sehingga $W \geq 2t$. Dari sifat basis campuran sebagai himpunan resolving campuran minimum maka mdim(Amal$\{C_{n_i}\}$) $\geq 2t$. Akan ditunjukkan dapat dipilih himpunan resolving campuran di Amal$\{C_{n_i}\}$ yang memiliki kardinalitas $2t$. Buat himpunan U yang memuat semua titik di setiap P_{n_i} yang berjarak k_i dari titik v_{oi}. Terdapat 2 titik untuk setiap P_{n_i} yang berjarak k_i dari titik v_{oi}. Jadi $|U| = 2t$. Berikutnya adalah menunjukkan bahwa U adalah himpunan resolving campuran.Dari pembuktian Teorema 2 diperoleh bahwa himpunan U adalah superset dari himpunan resolving sisi di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$, yang berarti U juga suatu himpunan resolving sisi di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$. Kemudian dari penjelasan tentang Teorema 1 juga bisa diperoleh kesimpulan bahwa himpunan U adalah superset dari himpunan resolving di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$, yang berarti U juga suatu himpunan resolving di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$. Jadi setiap dua titik atau setiap dua sisi yang berbeda di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ memiliki representasi yang berbeda terhadap U. Sehingga pernyataan berikutnya yang perlu dibuktikan adalah untuk setiap pasangan titik v dan sisi e di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ memiliki representasi yang berbeda terhadap U. Jika titik v bukanlah titik yang menempel pada sisi e maka representasi v pasti berbeda dengan representasi e terhadap W di Amal$\{C_{n_i}\}$ karena dapat dipandang pasangan titik dan garis tersebut menjadi pasangan dua titik yang sudah dipastikan memiliki representasi yang berbeda.
Jika titik v menempel pada e, dapat dibagi dalam dua kasus:
Kasus 1: Sisi $e = v_{k_i} u_{k_i} \in C_{n_i}$ di Amal$\{C_{n_i}\}$, dengan $d(v_{k_i}, v_{oi}) = d(u_{k_i}, v_{oi})$. Kasus ini terjadi pada satu sisi di lingkaran C_{n_i} yang berjumlah titik ganjil. Untuk sisi ini, $d(e, v_{k_i}) = 0 = d(e, u_{k_i})$, $d(v_{k_i}, v_{k_i}) = 0, d(v_{k_i}, u_{k_i}) = 1$, dan $d(u_{k_i}, v_{k_i}) = 1, d(u_{k_i}, u_{k_i}) = 0$. Jadi $r(e|U) \neq r(v_{k_i}|U)$ dan $r(e|U) \neq r(u_{k_i}|U)$.
Kasus 2: Sisi $e = uv \in C_{n_i}$ dengan sifat $|d(u, v_{oi}) - d(v, v_{oi})|$. Tanpa mengurangi keumuman pembuktian, misalkan $e = v_i v_{i+1} \in C_{n_i}$, dengan $i \in \{1, 2, \cdots, k_i - 1\}$. Sehingga $d(e, v_{oi}) = d(v_i, v_{oi})$ tapi $d(e, v_{oi}) = d(v_{i+1}, v_{oi}) - 1$ dan $d(e, v_{k_i}) = d(v_i, v_{k_i}) + 1$. Jadi $r(e|U) \neq r(v_i|U)$ dan $r(e|U) \neq r(v_{i+1}|U)$. Jadi setiap pasangan titik v dan sisi e di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$ memiliki representasi yang berbeda terhadap U. Hal ini melengkapi bukti bahwa himpunan U menghasilkan representasi yang berbeda untuk semua titik

atau sisi di graf amalgamasi lingkaran Amal$\{C_{n_i}\}$. Jadi U adalah himpunan resolving campuran dengan kardialitas $2t$. Jadi mdim(Amal$\{C_{n_i}\}$) = $2t$. ■

4 KESIMPULAN

- mdim(Amal$\{C_{n_i}\}$) dan edim(Amal$\{C_{n_i}\}$) hanya bergantung pada berapa banyak lingkaran pembangun untuk graf amalgamasi.
- Hasil ini mengkonfirmasi sifat dasar dari himpunan resolving campuran dari suatu graf G haruslah himpunan resolving sisi dan juga himpunan resolving atau

$$\text{mdim}(\text{Amal}\{C_{n_i}\}) \geq \max\{\text{edim}(\text{Amal}\{C_{n_i}\}), \text{dim}(\text{Amal}\{C_{n_i}\})\}$$

.

REFERENCES

[1] Carlson, K., ”Generalized Books and Cm-Snakes are Prime Graphs”, *Ars Combin.*, **80**, 215–221, 2006.

[2] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A., and Oellermann, O.R., ”Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph”, *Discrete Appl.*, **105**, 99–113, 2000.

[3] Harary, F., and Melter, R.A., ”On the metric dimension of a graph”, *Ars Combinatoria*, **2**, 191–195, 1976.

[4] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., and Salman, A.N.M., ”Metric dimension of amalgamation of cycles”, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, **41:1**, 19–31, 2010.

[5] Kelenc, A., Kuziak, D., Taranenko, A., and Yero, I.G., ”Mixed metric dimension of graphs”, *Applied Mathematics and Computation*, **314**, 429–438, 2017.

[6] Kelenc, A., Niko, T., and Yero, I.G., ”Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension”, *Discrete Applied Mathematics*, in press, 2018.

[7] Slater, P.J., ”Leaves of trees”, Proceeding of the 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, *Congressus Numerantium **14***, 549–559, 1975.