Kalkulus 1600A103

Pendahuluan UTS

Semester Gasal 2019-2020

Materi per Pertemuan

Pertemuan	Materi	Tugas/Kuis
1	Sistem Bilangan Riil	-
2	Fungsi	**Tugas 1**
3	Lanjutan Fungsi 1	-
4	Lanjutan Fungsi 2	**Kumpul Tugas 1**
5	Lanjutan Fungsi 3	-
6	Persamaan	-
7	Limit	**Tugas 2**

Pertemuan	Materi	Tugas/Kuis
8	Lanjutan Limit 1	-
9	Lanjutan Limit 2	**Kumpul Tugas 2**
10	Turunan	**Tugas 3**
11	Lanjutan Turunan 1	-
12	Kuis UTS	**Kumpul Tugas 3** **Tugas 4**
13	Aplikasi Turunan	-
14	Lanjutan Aplikasi Turunan	**Kumpul Tugas 4**

Kuis

1. Waktu 50-60 menit, soal 3-4.
2. ***Materi kuis UTS***: Pertemuan 1 s/d 11

Penilaian

NTS = 5% nilai asistensi + 20% rata-rata tugas 1-4 + 15% kuis UTS + 60% UTS

Format Tugas

- Satu kelompok ***terdiri dari 5-6 mahasiswa***.
- Kelompok dan anggota kelompok dibentuk pada minggu ke-1.
- Ditulis pada ***kertas A4 HVS, tidak bolak-balik***.
- ***Pakai template cover*** yang diberikan.
- ***Distaples 2 buah dipinggir***.

Sumber Materi Kuliah

Buku-buku:

1. Hass, J., dkk., *Thomas' Calculus*, edisi 14, Pearson, 2018.
2. Stewart, J., *Calculus – Early Transcendentals*, edisi 8, Cengage Learning, 2016.
3. ***Larson, R., dan Edward, B., Calculus, edisi 11, John Wiley & Sons, Inc., 2018.***
4. ***Iswadi, H., dkk., Kalkulus.***

Slide, Tugas, Nilai, dan Pengumuman dikomunikasikan melalui:

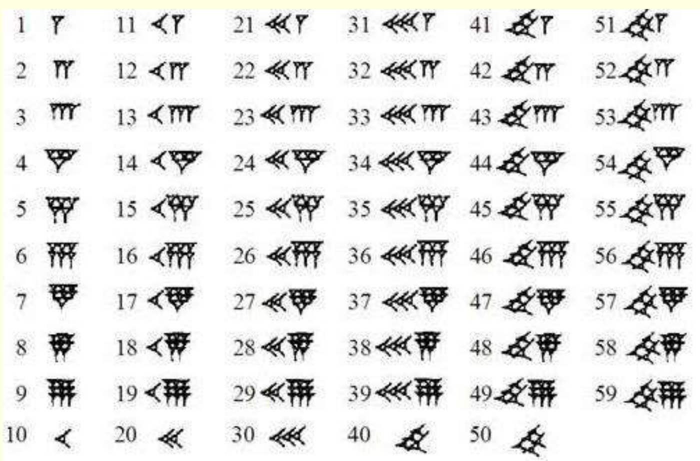
1. Ubaya Learning Space, ***uls.ubaya.ac.id***
2. Hazrul Iswadi Personal Web, ***www.hazrul-iswadi.com***
3. Email student masing-masing mahasiswa

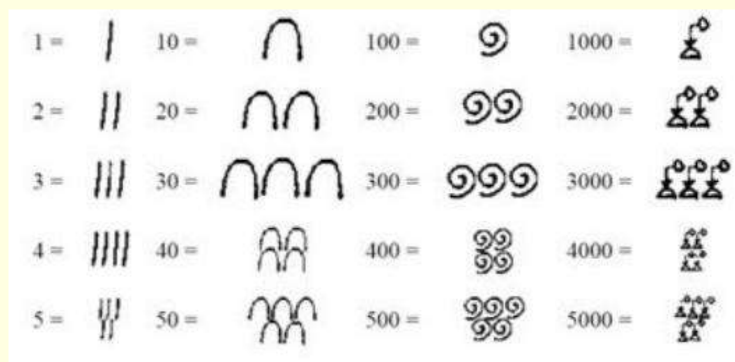
Pertemuan 1

Sistem Bilangan

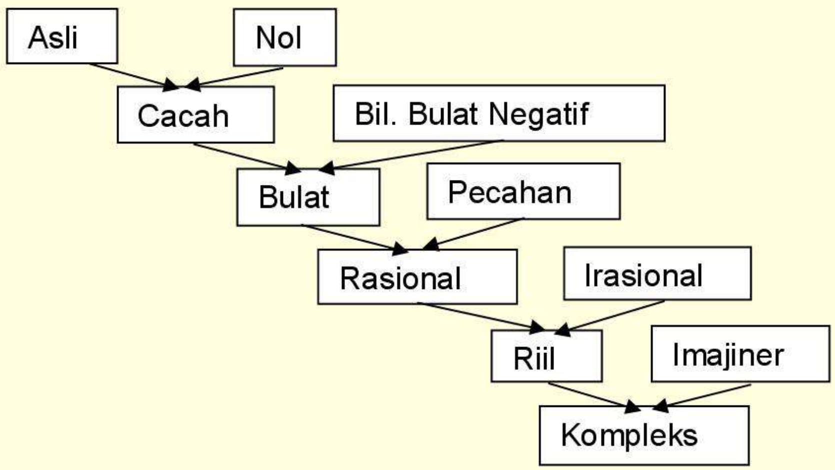
Pendahuluan

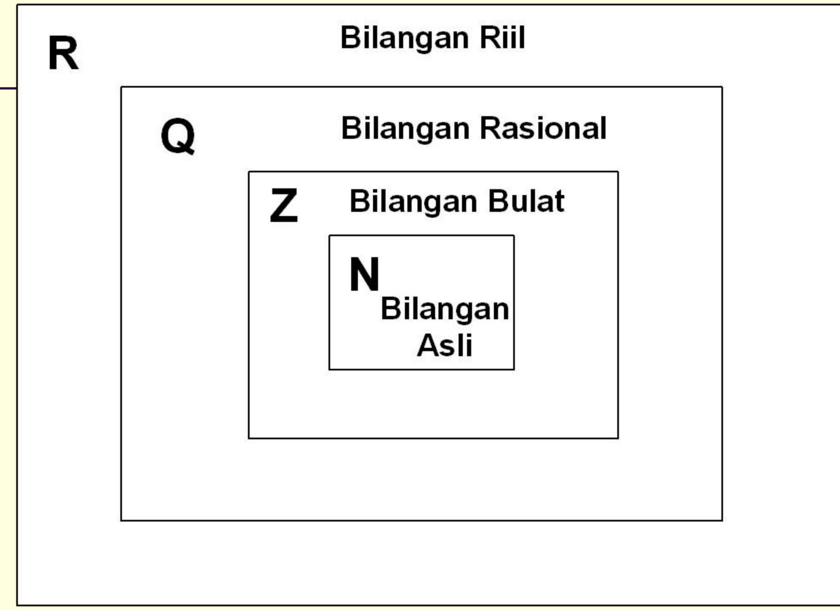
- Matematika berkaitan erat dengan bilangan.
- Dalam kamus besar bahasa Indonesia, matematika adalah ilmu tentang bilangan-bilangan.
- Untuk mempelajari kalkulus (yang merupakan bagian dari matematika) terlebih dahulu harus mengerti sifat-sifat bilangan.
- Fungsi yang dipelajari dalam kalkulus sebagian besar mempunyai daerah definisi bilangan riil.





Pohon Bilangan





Himpunan bilangan asli
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$\downarrow \longleftarrow + 0$

Himpunan bilangan cacah
$\mathbb{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$\downarrow \longleftarrow$ + negatif dari bilangan asli

Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ dan } n \neq 0\right\}$

$\downarrow \longleftarrow$ + bilangan irasional

Himpunan bilangan real
$\mathbb{R}$

Sistem Bilangan Riil

Himpunan bilangan riil bersama-sama dengan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian membentuk suatu sistem yang dikenal dengan **sistem bilangan riil** Matematika berkaitan erat dengan bilangan.

Sifat-sifat Dasar Bilangan Riil…

Misalkan *x*, *y*, dan *z* bilangan riil.

1. Komutatif : $x + y = y + x$ dan

   $xy = yx$.

2. Asosiatif : $x + (y + z) = (x + y) + z$

   dan $x(yz) = (xy)z$.

3. Distributif : $x(y + z) = xy + xz$.

Sifat-sifat Dasar Bilangan Riil

4. Elemen identitas, yaitu 0 dan 1

   yang memenuhi $x + 0 = x$ dan

   $x.1 = x$.

5. Unsur invers :

   a. Invers penjumlahan untuk *x* adalah –*x*

   b. Invers perkalian untuk *x* ($x \neq 0$) adalah $\frac{1}{x}$

Pengurangan dan Pembagian

Pengurangan dan pembagian didefinisikan sebagai:

$$x - y = x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}$$

Garis Riil…

- Secara geometri, bilangan riil dapat digambarkan sebagai titik dalam garis bilangan yang disebut sebagai *garis riil*.
- Setiap bilangan riil berhubungan dengan *satu dan hanya satu* titik di garis riil.

Garis Riil

- Bilangan negatif letaknya pada bagian kiri dan bilangan positif letaknya pada bagian kanan dari bilangan nol
- Perlu konsep urutan

Urutan…

- Bilangan riil *y* pada bagian kanan lebih besar nilainya daripada bilangan riil *x* pada bagian kiri
- Simbol $x < y$.

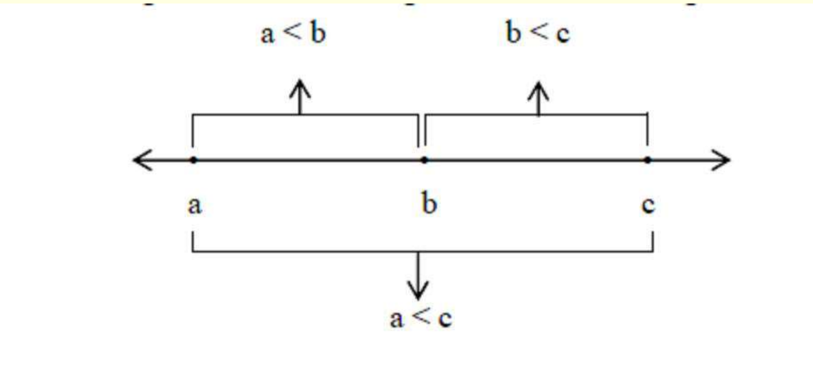
Urutan

- Simbol-simbol lain yang menyatakan urutan adalah >, ≤ dan ≥, dengan perjanjian: $x > 0$ jika dan hanya jika *x* bilangan positif dan $x \geq 0$ jika dan hanya jika *x* bilangan positif atau nol

Sifat Urutan…

Misalkan *x*, *y*, dan *z* adalah bilangan riil. Berlaku sifat-sifat berikut:

1. Trikotomi: untuk setiap *x* dan *y*, berlaku $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.
2. Transitif: jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.
3. Penambahan: jika $x < y$ maka $x + z < y + z$.



Sifat Urutan

4. Perkalian:
   - jika z positif dan $x < y$ maka $xz < yz$.
   - jika z negatif dan $x < y$ maka $xz > yz$.

Sifat-sifat 2, 3, dan 4 berlaku juga untuk relasi ≤ dan ≥.

Definisi Eksponen untuk Pangkat Nol, Negatif dan Pecahan

Didefinisikan $a^0 = 1,$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \left\langle \begin{array}{l} a \in \Re \,,\, n \ \text{ gasal} \\ \\ a > 0 \,,\, n \ \text{ genap} \end{array} \right.$$

Sifat Eksponen

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$
4. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
5. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
8. $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

Definisi Nilai Mutlak

Misal x bilangan riil, nilai mutlak x dinotasikan dengan $|x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Sifat Nilai Mutlak …

1. $\forall x \in \Re$, berlaku :
   - $|x| \geq 0$
   - $|-x| = |x|$
   - $|x|^2 = |x^2| = x^2$.
2. $\forall x, y \in \Re$, berlaku :
   - $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$.

Sifat Nilai Mutlak …

3. $\forall a \geq 0$, berlaku :
   - $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$.
   - $|x| \geq a \Leftrightarrow a \leq x$ atau $x \leq -a \Leftrightarrow x^2 \geq a^2$.
4. Ketidaksamaan segitiga, $\forall x, y \in \Re$, berlaku :
   - $|x + y| \leq |x| + |y|$.
   - $|x - y| \leq |x| + |y|$.
   - $|x| - |y| \leq |x - y|$.
   - $\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x - y|$

Sifat Nilai Mutlak

5. $\forall x, y \in \Re$, berlaku :
   - $|xy| = |x|\,|y|$
   - $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Selang

- *Selang* atau *interval* adalah himpunan bagian dari bilangan riil yang terdiri dari dua buah bilangan bersama dengan semua bilangan yang terletak di antara kedua bilangan tersebut
- Berdasarkan sifat dua bilangan di ujung-ujung selang dikenal macam-macam selang :
- **Selang hingga** jika kedua bilangan di ujung-ujung interval adalah bilangan riil.
- **Selang tak hingga** jika salah satu atau kedua bilangan di ujung-ujung interval adalah bilangan ∞ atau $-\infty$.

Selang Hingga

Notasi	Himpunan	Grafik garis bilangan	Nama selang
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b	Selang buka
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	a b	Selang tutup
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	a b	Selang setengah tutup-setengah buka
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	a b	Selang setengah buka-setengah tutup

Selang Tak Hingga

Notasi	Himpunan	Grafik garis bilangan	Nama selang
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a	Sinar buka kiri
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	a	Sinar tutup kiri
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b	Sinar buka kanan
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	b	Sinar tutup kanan
$(-\infty, \infty)$	Himpunan semua bil. real		Garis bilangan

Persamaan

- Persamaan adalah suatu kalimat matematika yang mengandung variabel dan memuat tanda =.
- Contoh

  $2 + 5x = 12,\ 4^{x-2} = 64,\ \log(3x) - 2 = 0$
- Penyelesaian suatu persamaan adalah himpunan bilangan riil sebagai nilai dari variabel yang memenuhi persamaan tersebut.
- Contoh

  $x = 2$ adalah penyelesaian $2 + 5x = 12$

Persamaan Linier

- Persamaan linear adalah sebuah persamaan yang tiap sukunya merupakan konstanta atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal berderajat satu.
- Untuk persamaan linier satu variabel maka penyelesaiannya tunggal
- Untuk persamaan linier lebih dari satu variabel maka akan mempunyai banyak penyelesaian.
- Seluruh sifat dasar bilangan riil berlaku pada persamaan linier.

Latihan

- Manakah yang merupakan penyelesaian dari persamaan yang diberikan.

1. $z+3(z-4)=5;17/4,4$
2. $12-7x=-x^2;4,3$
3. $\frac{y+1}{y+3}+\frac{y+5}{y-2}=\frac{7(2y+1)}{y^2+y-6};3/2,2$

Latihan

- Tentukan penyelesaian persamaan berikut

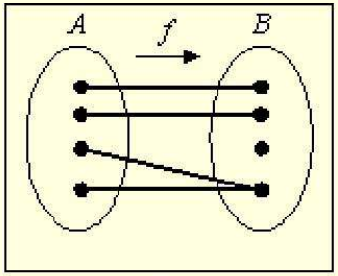
1. $2x-4x=-5$
2. $5(p-7)-2(3p-4)=3p$
3. $\frac{x}{5}+\frac{2(x-4)}{10}=7$

Pertemuan 2

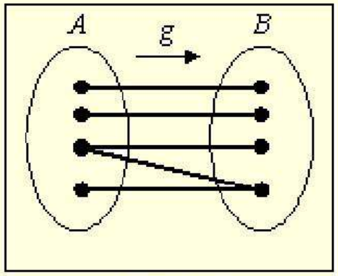
Fungsi

Definisi Fungsi

Misalkan A dan B merupakan himpunan. Fungsi dari A ke B adalah aturan yang mengkaitkan tiap unsur dalam A dengan suatu unsur *unik/tunggal* di B.



Fungsi



Bukan Fungsi

Definisi Domain

Misalkan $f : \Re \to \Re$, $\Re$ adalah himpunan bilangan riil. Domain fungsi *f*, ditulis dengan D_f, adalah himpunan semua nilai $x \in \Re$, sehingga $f(x)$ dapat dihitung sebagai suatu bilangan riil. Domain fungsi *f* kadangkala disebut dengan daerah asal fungsi *f* atau daerah definisi fungsi *f*.

Definisi Range

Misalkan $f : \Re \to \Re$, $\Re$ adalah himpunan bilangan riil. Range fungsi *f*, ditulis dengan R_f, adalah himpunan bagian $\Re$ yang memuat semua nilai-nilai dari fungsi *f*. $R_f := \{y \in \Re; y \text{ nilai dari fungsi } f\}$.

Langkah Menentukan Domain ...

1. Jika berupa fungsi pecahan maka penyebut tidak boleh nol.
2. Tentukan daerah definisi masing-masing komponen atau faktor yang ada dalam fungsi. Daerah definisi komponen dan faktor fungsi tergantung pada bentuk komponen dan faktornya.

Langkah Menentukan Domain

3. Lakukan irisan dari daerah-daerah yang diperoleh pada poin 1 dan 2. Daerah irisan itulah yang menjadi D_f.

Langkah Menentukan Range

Misalkan f mempunyai daerah asal D_f. Untuk menentukan apakah bilangan y yang diberikan merupakan unsur di R_f selesaikan persamaan $f(x) = y,\ x \in D_f$. Jika terdapat solusi untuk $x \in D_f$ maka $y \in R_f$. Jika tidak maka $y \notin R_f$.

Contoh

1. Tentukan D_f fungsi f yang didefinisikan sebagai berikut

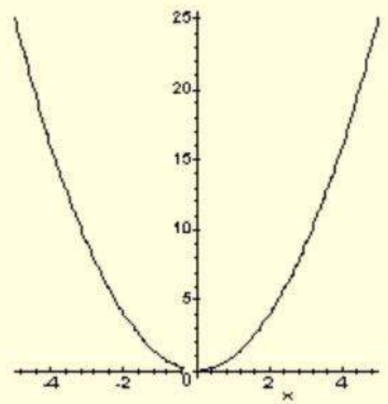
$$f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3+x}} + \sqrt[6]{3x+2} + \frac{1}{x-3}$$

2. Definisikan fungsi $f(x) = 3 + \sqrt{4-x^2}$.
   a. Apakah $4 \in R_f$?
   b. Apakah $2 \in R_f$?
   c. Tentukan R_f.

Grafik Fungsi

Representasi fungsi:

1. Diagram
2. Tabel
3. Formula
4. Grafik



Sifat Fungsi: Genap dan Gasal

1. Fungsi genap: sifat $f(-x) = f(x)$. Bentuk geometri fungsi genap adalah simetri terhadap sumbu *y*.
2. Fungsi gasal: sifat $f(-x) = -f(x)$. Bentuk geometri fungsi gasal adalah simetri terhadap titik asal 0.
3. Fungsi bukan genap dan gasal.

Sifat Fungsi: Periodik

Fungsi f dikatakan periodik jika terdapat suatu bilangan positif p sehingga

$$f(x+p) = f(x), \text{ untuk setiap } x \in D_f.$$

Bilangan p terkecil yang memenuhi sifat di atas disebut dengan *periode* f

Jenis Fungsi

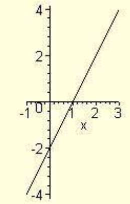
1. Polinom atau suku banyak
2. Fungsi rasional
3. Fungsi trigonometri
4. Fungsi eksponensial
5. Fungsi sepotong-sepotong
6. Fungsi logaritma
7. Fungsi akar
8. Fungsi invers trigonometri

Polinomial (Suku Banyak)

- Suku banyak, $P(x)$, adalah fungsi yang berbentuk $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
  Dengan $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,$ dan a_0 adalah bilangan riil dan n bilangan cacah.
- Derajat suku banyak $P(x)$ ditandai oleh pangkat tertinggi suku banyak.
- Domain fungsi linier adalah $D_f = \Re$

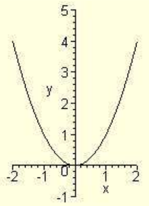
Fungsi Linier

- Bentuk umum: $f(x) = ax + b$
- $D_f = R_f = \Re$
- Gambar grafik fungsi linier adalah garis lurus.
- Contoh grafik $f(x) = 2x - 2$



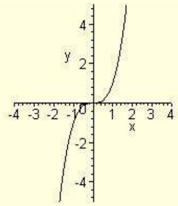
Fungsi Kuadrat

- Bentuk umum: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- $D_f = \Re$
- Gambar grafik fungsi kuadrat adalah parabola
- Contoh grafik $f(x) = x^2$, $D_f = \Re, R_f = [0, \infty)$



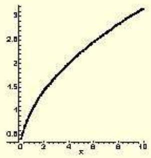
Fungsi Kubik

- Bentuk umum: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $D_f = R_f = \Re$
- Contoh grafik $f(x) = x^3$



Fungsi Akar

- Fungsi akar ke-n , $\sqrt[n]{x}$, adalah fungsi invers dari fungsi $f(x) = x^n$
- $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$
- Jika n genap maka $D_f = [0,+\infty)$
- Jika n gasal maka $D_f = \Re$
- Contoh grafik: $f(x) = \sqrt{x}\ D_f = [0,+\infty)\ R_f = [0,+\infty)$.

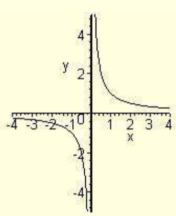


Fungsi Rasional …

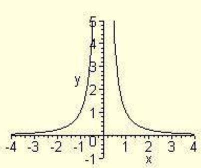
- Bentuk umum: $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ berbentuk suku banyak
- Contoh grafik:
  - $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
  - $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R_f = (0, \infty)$

Fungsi Rasional

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$



- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

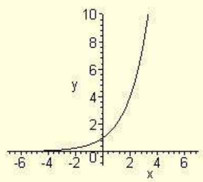


Fungsi Eksponen …

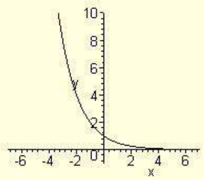
- Bentuk umum: $f(x) = ka^x$, k konstanta, $a > 0$
- $D_f = \Re$
- Contoh grafik:
  - $f(x) = 2^x, D_f = \Re, R_f = (0,+\infty)$
  - $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, D_f = \Re, R_f = (0,+\infty)$

Fungsi Eksponen

- $f(x) = 2^x$

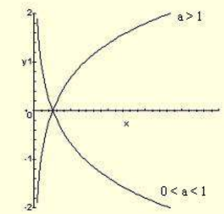


- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fungsi Logaritma

- Fungsi logaritma, ${}^a\log x$, adalah fungsi invers dari fungsi eksponen
- $y = {}^a\log x \Leftrightarrow x = a^y$, $a > 0$
- $y = {}^e\log x = \ln x$
- $y = {}^{10}\log x = \log x$
- $D_f = (0, +\infty)$ dan $R_f = \Re$

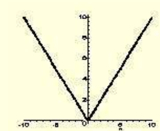


Fungsi Sepotong-sepotong

- Nilai Mutlak
- Heaviside

Fungsi Nilai Mutlak

- Fungsi nilai mutlak adalah fungsi yang melibatkan bentuk $|x|$
- Contoh grafik: $f(x) = |x|$, $D_f = \Re, R_f = [0, \infty)$

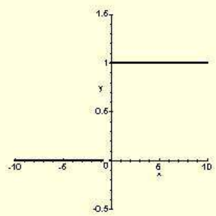


Fungsi Heaviside

- Fungsi Heaviside, $H(x)$, didefinisikan sebagai

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

- $D_f = \Re, R_f = \{0,1\}$



Pertemuan 3

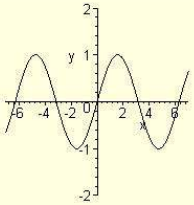
Fungsi (Lanjutan 1)

Fungsi Trigonometri

- Sinus
- Cosinus
- Tangen
- Cotangen
- Secant
- Cosecant

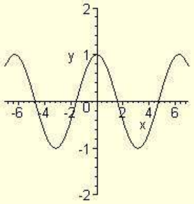
Fungsi Sinus

- Bentuk umum: $f(x) = \sin x$
- Fungsi periodik dengan periode 2π
- $D_f = \Re, R_f = [0,1]$



Fungsi Cosinus

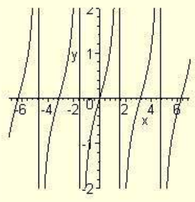
- Bentuk umum: $f(x) = \cos x$
- Fungsi periodik dengan periode 2π
- $D_f = \Re, R_f = [0,1]$



Fungsi Tangen

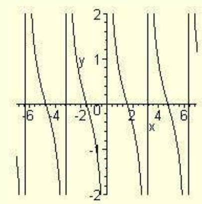
- Bentuk umum: $f(x) = \tan x$
- Fungsi periodik dengan periode π
- $D_f = \left\{ x \in \Re, x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5, \ldots \right\}$,

  $R_f = \Re$



Fungsi Cotangen

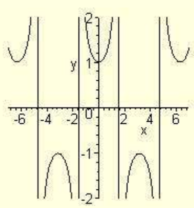
- Bentuk umum: $f(x) = \cot x$
- Fungsi periodik dengan periode π
- $D_f = \{ x \in \Re, x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \}$, $R_f = \Re$



Fungsi Secant

- Bentuk umum: $f(x) = \sec x$
- Fungsi periodik dengan periode 2π
- $D_f = \left\{ x \in \Re, x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5, \ldots \right\}$,

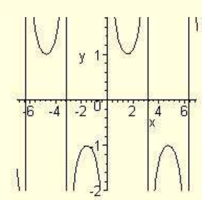
  $R_f = \Re - (-1,1)$



Fungsi Cosecant

- Bentuk umum: $f(x) = \csc x$
- Fungsi periodik dengan periode 2π
- $D_f = \{ x \in \Re, x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \}$,

  $R_f = \Re - (-1,1)$

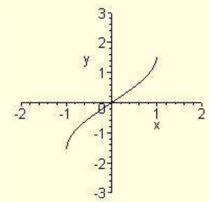


Fungsi Invers Trigonometri

- ArcSinus
- ArcCosinus
- ArcTangen
- ArcCotangen
- ArcSecant
- ArcCosecant

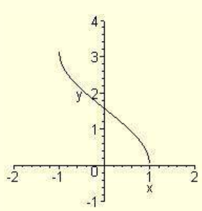
Fungsi ArcSinus

- $f(x) = \arcsin x$ adalah invers $f(x) = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \sin^{-1} x$
- $D_f = [-1,1]$ dan range $R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



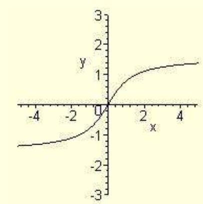
Fungsi ArcCosinus

- $f(x) = \arccos x$ adalah invers $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \cos^{-1} x$.
- $D_f = [-1,1]$ dan range $R_f = [0, \pi]$.



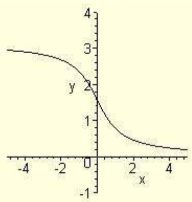
Fungsi ArcTangen

- $f(x) = \arctan x$ adalah invers $f(x) = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \tan^{-1} x$.
- $D_f = \Re$ dan $R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



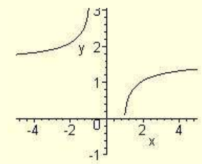
Fungsi ArcCotangen

- $f(x) = arc\cot x$ adalah invers $f(x) = \cot x$, $x \in (0, \pi)$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \cot^{-1} x$.
- $D_f = \Re$ dan $R_f = (0, \pi)$.



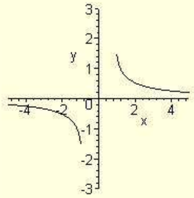
Fungsi ArcSecant

- $f(x) = arc\sec x$ adalah invers $f(x) = \sec x$, $x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \sec^{-1} x$.
- $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ dan $R_f = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.



Fungsi ArcCosecant

- $f(x) = arc\csc x$ adalah invers $f(x) = \csc x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.
- Juga sering ditulis dengan $f(x) = \csc^{-1} x$.
- $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ dan $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.

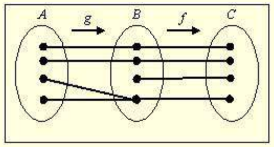


Pertemuan 4

Fungsi (Lanjutan 2)

Komposisi Fungsi

- Misal $g : A \to B$ dan $f : B \to C$ dengan $R_g \cap D_f \neq \varnothing$
- Komposisi f dan g didefinisikan sebagai
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
- Secara umum $f \circ g \neq g \circ f$.



Contoh

Diketahui $f(x) = \log x$ dan $g(x) = \sqrt{x}$

a. apakah $f \circ g$ ada?

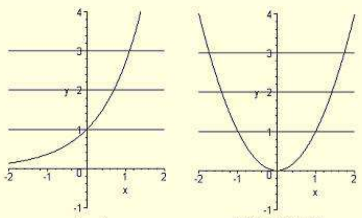
b. jika $f \circ g$ ada bagaimana bentuk $(f \circ g)(x)$

Fungsi Satu-Satu …

- Misal $f : A \to B$, f disebut fungsi satu-satu (injektif) jika untuk setiap $x_1, x_2 \in D_f$ dengan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Contoh fungsi satu-satu: fungsi linier, akar, eksponen, dan logaritma.
- Contoh fungsi tidak satu-satu: fungsi kuadrat , trigonometri

Fungsi Satu-Satu

- Dengan membatasi domain, suatu fungsi yang tidak satu-satu dapat menjadi fungsi satu-satu.
- $f(x) = x^2$, jika domainnya $D_f = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ maka akan menjadi fungsi satu-satu.



satu-satu   tidak satu-satu

Invers Fungsi

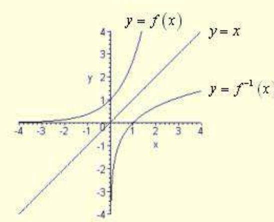
- Invers fungsi f, ditulis f^{-1}, adalah fungsi yang memenuhi $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = I(x) = x$, untuk setiap $x \in D_f$
- Jika f dapat diinverskan dan f^{-1} adalah invers dari f, maka $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
- $D_f = R_{f^{-1}}$ dan $R_f = D_{f^{-1}}$

Langkah Mendapatkan Invers Fungsi

1. Misalkan $y = f(x)$
2. Selesaikan $y = f(x)$ sehingga diperoleh x sebagai fungsi dari y.
3. Tukar kembali variabel x dengan y dan y dengan x dalam fungsi $x = f^{-1}(y)$.

Grafik Invers Fungsi

- Jika grafik fungsi $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ digambarkan dalam satu sumbu koordinat maka grafiknya simetri terhadap garis $y = x$.



Contoh

Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 4x - 6, \quad x \geq -2$.

1. Secara grafik, perlihatkan bahwa fungsi f dapat diinverskan.
2. Tentukan fungsi invers dari fungsi f.
3. Gambarkan f dan f^{-1} dalam satu sistem koordinat.

Latihan

1. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$ fungsi-fungsi berikut
   a. $f(x) = x + 1,\ g(x) = 2e^{x-1}$
   b. $f(x) = \sqrt{3x-7},\ g(x) = \log(x+5)$
2. Tentukan invers fungsi berikut
   a. $f(x) = x^2 + 4x - 1, x < -2$
   b. $f(x) = \sqrt{6-5x}$
   c. $f(x) = 4e^{-8x} - 2$

Kunci Jawaban

1. a. $(f \circ g)(x) = 2e^{x-1} + 1,\ (g \circ f)(x) = 2e^{x}$
   b. $(f \circ g)(x) = \sqrt{3\log(x+5) - 7}$,
   $(g \circ f)(x) = \log\left(\sqrt{3x-7} + 5\right)$
2. a. $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+5}$
   b. $f^{-1}(x) = -\frac{x^2}{5} - \frac{6}{5}$
   c. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)$

Pertemuan 5

Fungsi (Lanjutan 3)

Menggambar Grafik Fungsi

- Cara cepat untuk menggambar fungsi bisa dilakukan dengan mendapatkan gambar grafik dengan pergeseran, pensekalaan, atau pencerminan dari fungsi dasar yang telah diketahui bentuk grafik fungsinya

Pergeseran

- Jenis pergeseran ada dua:
  1. Pergeseran horizontal
  2. Pergeseran vertikal
- Misalkan c bilangan positif tertentu dan $f(x)$ fungsi yang gambar grafiknya telah diketahui.

Pergeseran Horisontal

- Menukar x dengan $(x - c)$ akan menggeser grafik fungsi f ke kanan sejauh c satuan.
- Menukar x dengan $(x + c)$ akan menggeser grafik fungsi f ke kiri sejauh c satuan.

Pergeseran Vertikal

- Menukar $f(x)$ dengan $f(x) + c$ akan menggeser grafik fungsi f ke atas sejauh c satuan.
- Menukar $f(x)$ dengan $f(x) - c$ akan menggeser grafik fungsi f ke bawah sejauh c satuan.

Peskalaan

- Jenis penskalaan ada dua:
  1. Penskalaan horizontal
  2. Penskalaan vertikal
- Misalkan c bilangan positif tertentu dan $f(x)$ fungsi yang gambar grafiknya telah diketahui.

Penskalaan Horisontal

- Misal $g(x) = f(kx)$
- Jika $k > 1$, grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f yang telah dimampatkan dalam arah sumbu x dengan faktor skala $1/k$.
- Jika $0 < k < 1$, grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f yang telah diregangkan dalam arah sumbu x dengan faktor skala $1/k$.

Penskalaan Vertikal

- Misal $g(x) = kf(x)$
- Jika $k > 1$, grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f yang telah diregangkan dalam arah sumbu y dengan faktor skala k.
- Jika $0 < k < 1$, grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f yang dimampatkan dalam arah sumbu y dengan faktor skala k.

Pencerminan

- Jenis pencerminan fungsi ada dua
  1. Pencerminan terhadap sumbu y
  2. Pencerminan terhadap sumbu x

Pencerminan terhadap sumbu y

- Jika variabel x dalam fungsi $f(x)$ diganti dengan variabel $-x$ maka grafik fungsi $f(-x)$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x)$ dengan mencerminkannya pada sumbu y.

Pencerminan terhadap sumbu x

- Jika fungsi $f(x)$ diganti dengan $-f(x)$ maka grafik fungsi $-f(x)$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x)$ dengan mencerminkannya pada sumbu x.

Contoh

Gambarkan grafik $f(x) = -3x^2 + 12x - 6$ dengan cara melakukan pergeseran, penskalaan dan pencerminan dari fungsi yang telah diketahui gambar grafiknya.

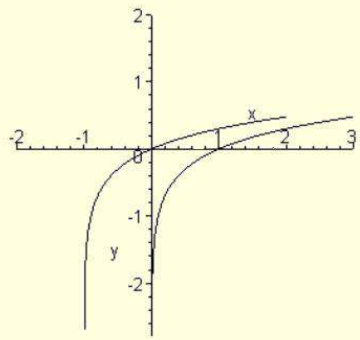
Latihan

Sketsa grafik fungsi berikut dengan pergeseran, penskalaan, dan pencerminan serta tentukan domain dan rangenya

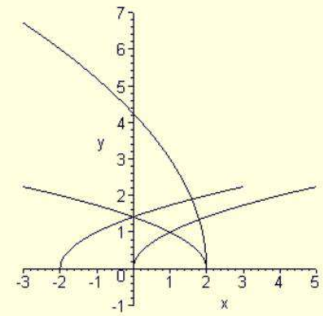
1. $f(x) = \log(x+1)$
2. $f(x) = 3\sqrt{2-x}$
3. $f(x) = x^2 + 4x + 3$
4. $f(x) = e^{2x-4}$
5. $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$

Kunci Jawaban …

1. $D_f = (-1, \infty)$, $R_f = \mathbb{R}$

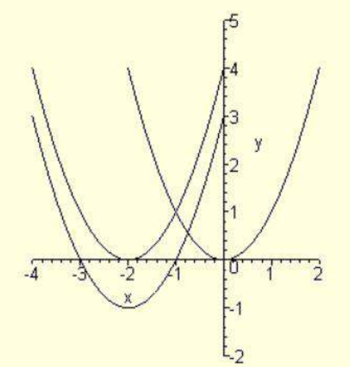


2. $D_f = (-\infty, 2]$, $R_f = [0, \infty)$

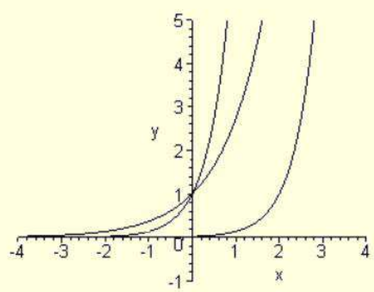


Kunci Jawaban …

3. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1, \infty)$

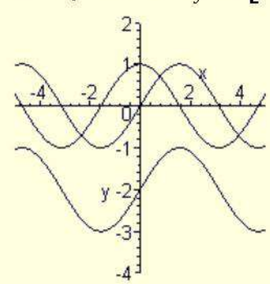


4. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [0, \infty)$



Kunci Jawaban

5. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-3, -1]$



Pertemuan 6

Persamaan

Persamaan Kuadrat

- Bentuk umum: $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c adalah konstanta riil dan $a \neq 0$.
- Berdasarkan diskriminannya ($D = b^2 - 4ac$) persamaan kuadrat dapat dibagi menjadi tiga, yaitu:

1. jika $D > 0$ maka persamaan kuadrat mempunyai dua penyelesaian riil yang berbeda
2. jika $D = 0$ maka persamaan kuadrat mempunyai satu penyelesaian riil
3. jika $D < 0$ maka persamaan kuadrat tidak mempunyai penyelesaian riil, penyelesaiannya berupa dua bilangan kompleks sekawan.

Menyelesaikan Persamaan Kuadrat: Memfaktorkan

Prinsip yang digunakan adalah jika a dan b adalah bilangan riil dengan $ab = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$. Persamaan kuadrat difaktorkan menjadi $ax^2 + bx + c = (mx - x_1)(nx - x_2)$ dengan ketentuan $mn = a$, $\frac{x_1}{m} + \frac{x_2}{n} = -\frac{b}{a}$, dan $\frac{x_1 x_2}{mn} = \frac{c}{a}$.

Contoh

Tentukan penyelesaian $x^2 - 4x + 4 = 0$ dengan memfaktorkan

Menyelesaikan Persamaan Kuadrat: Melengkapkan kuadrat

Persamaan kuadrat diubah menjadi bentuk kuadrat sempurna $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$

Contoh

Tentukan penyelesaian $x^2 + 2x - 3 = 0$ dengan melengkapkan kuadrat

Menyelesaikan Persamaan Kuadrat: Rumus abc

Penyelesaian persamaan kuadrat dengan rumus abc adalah $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Contoh

Tentukan penyelesaian persamaan kuadrat berikut dengan rumus abc

$$4x^2 - 17x + 15 = 0$$

Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah persamaan yang memuat fungsi eksponen. Untuk menyelesaikan persamaan eksponen digunakan sifat-sifat eksponen

Bentuk Persamaan Eksponen

- Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka penyelesaian $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $f(x) = g(x)$
- Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}$. Jika $a > 0, a \neq 0, b > 0,$ dan $b \neq 1$ maka penyelesaian $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$

Bentuk Persamaan Eksponen

- **Bentuk** $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$. Penyelesaian $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan-persamaan berikut
  a. $f(x) = g(x)$
  b. $h(x) = 1$
  c. $h(x) = 0$, dengan syarat $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
  d. $h(x) = -1$, dengan syarat $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya bernilai genap atau keduanya bernilai gasal.

Bentuk Persamaan Eksponen

- **Bentuk** $Aa^{2x} + Ba^{x} + C = 0$. Penyelesaian $Aa^{2x} + Ba^{x} + C = 0$ diperoleh dengan melakukan substitusi $y = a^{x}$ sehingga menjadi persamaan kuadrat.

Contoh

1. Tentukan penyelesaian $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} = 32$

2. Tentukan penyelesaian $2^{x^2-3x+2} = 5^{x^2-3x+2}$

3. Tentukan penyelesaian $(x-2)^{x+5} = (x-2)^{2x+1}$

4. Tentukan penyelesaian $e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0$

Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah persamaan yang memuat fungsi logaritma. Untuk menyelesaikan persamaan logaritma digunakan sifat-sifat logaritma

Bentuk Persamaan Logaritma

- Bentuk ${}^{a}\log\left(f(x)\right) = {}^{a}\log\left(g(x)\right)$. Penyelesaian ${}^{a}\log\left(f(x)\right) = {}^{a}\log\left(g(x)\right)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $f(x) = g(x)$ dengan syarat syarat $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
- Bentuk ${}^{a}\log\left(f(x)\right) = {}^{b}\log\left(f(x)\right)$. Penyelesaian ${}^{a}\log\left(f(x)\right) = {}^{b}\log\left(f(x)\right)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $f(x) = 1$

Bentuk Persamaan Logaritma

- **Bentuk** ${}^{h(x)}\log\left(f(x)\right) = {}^{h(x)}\log\left(g(x)\right)$. Penyelesaian ${}^{h(x)}\log\left(f(x)\right) = {}^{h(x)}\log\left(g(x)\right)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $f(x) = g(x)$ dengan syarat-syarat $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, dan $h(x) > 0$ serta $h(x) \neq 1$
- **Bentuk** $A\left({}^{a}\log x\right)^2 + B\,{}^{a}\log x + C = 0$. Penyelesaian $A\left({}^{a}\log x\right)^2 + B\,{}^{a}\log x + C = 0$ diperoleh dengan melakukan substitusi $y = {}^{a}\log x$ sehingga menjadi persamaan kuadrat.

Contoh

- Tentukan penyelesaian persamaan berikut

1. ${}^{2}\log\left(x+3\right)={}^{2}\log\left(3x-5\right)$
2. ${}^{5}\log\left(x^{2}-x-1\right)={}^{3}\log\left(x^{2}-x-1\right)$
3. ${}^{x-1}\log\left(x^{2}-2x+2\right)={}^{x-1}\log\left(8-x\right)$
4. $\left(\log x\right)^{2}-2\log x-3=0$

Pertemuan 7

Limit

Definisi Limit …

- Perhatikan nilai $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}$, $x \neq 3$ di sekitar $x = 3$ pada tabel berikut

x	2,9	2,99	2,999	…	**3**	…	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	6,9	6,98	6,998	…	**?**	…	7,002	7,02	7,2

- Ketika x semakin mendekati ke 3 nilai f semakin mendekati ke 7.
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$ atau $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = 7$

Definisi Limit

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ berarti jika x semakin dekat ke *a*, tapi tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ semakin dekat dengan L.

Sifat Limit …

1. Jika q konstanta maka $\lim\limits_{x \to a} q = q$.
2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ maka

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \pm M$
4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x) = LM$.

Sifat Limit

5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$, asalkan $M \neq 0$

6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $L \geq 0$ untuk n genap.

Rumus Limit

Misalkan $n \in \aleph$, $\aleph$ himpunan bilangan asli, k dan $c \in \Re$, $p(x)$ adalah polinom maka

1. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$.
2. $\lim_{x\to a} kx = ka$.
3. $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.
4. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$.

Contoh

Hitung:

1. $\lim_{x\to 1} \sqrt{5x^4 + 3x^2 + 2x + 15}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[5]{2x^2 - 4x + 1}}{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{2x^2}}$

Limit Sepihak

- Jika pengamatan limit dilakukan dari satu sisi saja disebut dengan *limit satu sisi* atau *limit sepihak*.
- Limit sepihak terbagi dua:
  1. limit bagian kanan
  2. limit bagian kiri.

Limit Kanan

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ berarti jika x semakin dekat ke a, tapi tidak sama dengan a dan $x > a$, maka nilai $f(x)$ semakin dekat dengan L.

Limit Kiri

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ berarti jika x semakin dekat ke a, tapi tidak sama dengan a dan $x < a$, maka nilai $f(x)$ semakin dekat dengan L.

Teorema Keujudan Limit

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

jika dan hanya jika

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Contoh

Didefinisikan $f(x) = \begin{cases} 6x^2 - 3x + 1 & ; \quad x < -1 \\ 3 - 3x^2 - 2x^3 & ; \quad x \geq -1 \end{cases}$.

1. Hitung $\lim_{x \to -1^-} f(x)$
2. Hitung $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
3. Periksa apakah $\lim_{x \to -1} f(x)$ ada?

Limit yang Melibatkan Nilai Tak Hingga

- Dua tipe limit yang melibatkan nilai tak hingga
  - Limit tak hingga
  - Limit di tak hingga

Limit Tak Hingga

Limit tak hingga adalah limit suatu fungsi $f(x)$ yang nilainya menuju $+\infty$ atau $-\infty$ ketika x menuju suatu nilai a atau $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Contoh

1. Hitung

   a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

   b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2x^2 - x - 6\right)$

2. Jika $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$, hitung

   a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

   b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

   c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ jika ada

Limit di Tak Hingga

Limit di tak hingga adalah limit suatu fungsi $f(x)$ untuk x menuju $+\infty$ atau $-\infty$, ditulis dengan

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ atau $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$

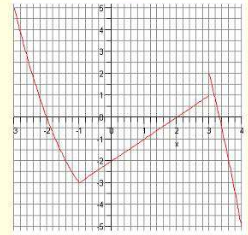
Contoh

Hitung

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}$, n bilangan asli.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt[5]{x^3}}$

Latihan …

1. Diketahui grafik fungsi f sebagai berikut



Dari grafik fungsi f di atas tentukan

a. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

c. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$

e. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

f. $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

Kunci Jawaban …

a. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -3$

b. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -3$

c. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -3$

d. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = 1$

e. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 2$

f. $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \text{tidak ada}$

Pertemuan 8

Limit (Lanjutan 1)

Limit Fungsi Trigonometri

Teorema utama limit fungsi trigonometri $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dengan menggunakan teorema utama diperoleh perhitungan limit di bawah ini

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

Contoh

Hitung

1. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{4x - \sin 3x}{3x + 5 \sin 2x}$

Limit Bentuk Tak Tentu

- Bentuk Tak Tentu antara lain

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \pm\infty \mp \infty \qquad 0 \pm \infty$$

$$1^{\pm\infty} \qquad 0^0 \qquad \pm\infty^0$$

Penyelesaian Limit Bentuk Tak Tentu

1. Mengubah limit bentuk tak tentu menjadi limit bentuk tentu.

   Hal ini seringkali dilakukan dengan cara:

   a. mengalikan dengan bentuk 1,

   b. menghilangkan faktor penyebab bentuk tak tentu dengan memfaktorkan.

2. Mensubstitusikan nilai x pada limit.

Limit bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$

Limit bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ adalah limit yang berbentuk $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $\lim_{x\to a} f(x)=0$ dan $\lim_{x\to a} g(x)=0$.

Contoh

Hitung :

1. $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x-3}$
2. $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{6x+16}-4}{5x}$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$

Limit bentuk tak tentu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Limit bentuk tak tentu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ adalah limit yang berbentuk $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ dan $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$.

Contoh

Hitung : 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^3+1}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt[5]{x^3}}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4^x - 4^{-x}}{4^x + 4^{-x}}$

Limit bentuk tak tentu $0.\pm\infty$

Limit bentuk tak tentu $0.\pm\infty$ adalah limit yang berbentuk $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$, dengan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Contoh

Hitung $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^5}\csc^2 x$

Limit bentuk tak tentu $\pm\infty \mp \infty$

Limit bentuk tak tentu $\pm\infty \mp \infty$ adalah limit yang berbentuk $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)+g(x)\right)$, dengan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mp\infty$.

Contoh

Hitunglah $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$

Limit bentuk tak tentu 0^0, $\pm\infty^0$, dan $1^{\pm\infty}$

Materi ini akan dibahas sesudah UTS

Latihan

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ $\quad(54\sqrt{3})$
2. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}$ $\quad(\frac{1}{2})$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5x + 25} - 5}{x}$ $\quad(\frac{1}{2})$
4. $\lim_{y \to \infty} \frac{y^2 - 2y + 2}{y^3 + 6y^2 - 11}$ $\quad(0)$
5. $\lim_{y \to 0} \frac{\sin 2x}{x - \tan 3x}$ $\quad(-1)$

Pertemuan 9

Limit (Lanjutan 2)

Definisi kekontinuan

Misalkan *f* terdefinisi pada suatu selang *I* yang memuat *c*. Fungsi *f* kontinu di *c* jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Uji kekontinuan fungsi di titik $x = c$

Fungsi *f* kontinu di *c* jika memenuhi tiga syarat berikut:

1. $f(c)$ ada.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Contoh

Apakah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin x} & ; \quad x \neq 0 \\ \dfrac{x}{\cos x} & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

kontinu di $x = 0$?

Sifat-sifat fungsi kontinu

Misalkan fungsi f dan g kontinu di $x = c$.

- fungsi $f + g$ kontinu di $x = c$
- fungsi kf kontinu di $x = c$, k suatu konstanta
- fungsi fg kontinu di $x = c$
- fungsi f/g kontinu di $x = c$ (asalkan $g(c) \neq 0$)

Sifat-sifat fungsi kontinu ...

- Fungsi polinom $p(x)$ kontinu di setiap bilangan riil c
- Fungsi rasional $r(x)$ kontinu di daerah definisinya
- Fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ kontinu di setiap bilangan riil c
- Jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$ maka fungsi komposisi $f \circ g$ kontinu di c

Jenis-jenis ketidakkontinuan

Terdapat tiga jenis ketidakkontinuan:

1. Ketidakkontinuan terhapuskan.
2. Ketidakkontinuan loncat.
3. Ketidakkontinuan tak hingga.

Ketidakkontinuan terhapuskan

Fungsi f dikatakan mempunyai ketidakkontinuan terhapuskan di $x = a$ jika

$\lim_{x \to a} f(x)$ ada tapi $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Contoh

Perhatikan fungsi yang didefinisikan

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan 3x}{2x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}.$$

1. Apakah fungsi $f(x)$ kontinu di x = 0?
2. Apa nilai $f(0)$ agar $f(x)$ kontinu di x = 0 ?

Ketidakkontinuan loncat

Fungsi *f* dikatakan mempunyai ketidakkontinuan loncat di *x* = *a* jika

$$\lim_{x\to a^+} f(x)\neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

atau limit kiri fungsi *f* di titik *x* = *a* tidak sama dengan limit kanan fungsi *f* di titik *x* = *a*

Ketidakkontinuan tak hingga

Fungsi *f* dikatakan mempunyai ketidakkontinuan

tak hingga di *x* = *a* jika garis *x* = *a* adalah garis asimtot tegak

Latihan

1. Apakah $f(x)=\begin{cases}4 & , \quad x=1\\ \dfrac{2x^2-2}{x-1} & , \quad x\neq 1\end{cases}$

kontinu di $x=1$, jelaskan !

($f(x)$ kontinu di $x=1$)

Latihan ...

2. Diketahui :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+8x+6}{2x+2} & , \quad x<-1\\[2ex] ax^2-x+2 & , \quad x=-1\\[2ex] \dfrac{-x-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+5}} & , \quad x>-1\end{cases}$$

a. Hitung $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ (2)

b. Hitung $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (2)

c. Berapa *a* agar *f*(*x*) kontinu di *x* = - 1 (*a* = -1)

Latihan …

3. Diketahui :

$$f(x)=\begin{cases}1-x & , \quad x<-4\\ 5 & , \quad x=-4\\ x^2+2x-3 & , \quad x>-4\end{cases}$$

a. Hitung *f* (- 4) (5)

b. Hitung $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$ (5)

c. Hitung $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ (5)

d. Apakah *f*(*x*) kontinu di *x*= - 4

(*f*(*x*) kontinu di *x*=-4)

Pertemuan 10

Turunan Fungsi

Pendahuluan

- Turunan adalah fungsi yang merupakan laju perubahan sesuatu terhadap sesuatu.
- Turunan adalah salah satu bagian dari kalkulus yang sangat banyak digunakan di berbagai bidang, misalnya digunakan untuk menghitung kecepatan, percepatan, dll.

Definisi Turunan

Turunan fungsi *f* adalah fungsi yang nilainya di setiap bilangan sembarang *x* di dalam domain *f* diberikan oleh

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(jika limitnya ada)

Notasi Turunan

Notasi yang sering digunakan untuk turunan fungsi $y = f(x)$ adalah:

1. $f'(x)$ atau y' : notasi Lagrange
2. $\frac{df}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$: notasi Leibniz
3. $D_x(f)$: notasi Operator D.

Sifat-sifat Turunan

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$, c konstanta
2. $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$, n sebarang bilangan real

Jika u dan v adalah fungsi x yang dapat diturunkan dan c adalah konstanta, maka

3. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v)$

Sifat-sifat Turunan ...

4. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}}{v^2}$, $v \neq 0$

Contoh

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari :

1. a. $y = \frac{\pi}{2}$ b. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
2. a. $y = \sqrt{x}$ b. $\frac{3}{2x\sqrt{x}}$
3. $y = 2x^2 - \frac{5}{x} + x^6$
4. $y = \left(x^2 - 3\right)(3x + 4)$
5. $y = \frac{x^3}{x^4 - x^2}$

Rumus-rumus Turunan Fungsi

1. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
5. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
6. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
7. $\frac{d}{dx}({}^a\log x) = \frac{1}{x \ln a}$
8. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
9. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
10. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
11. $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
14. $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cot} x = \frac{-1}{1+x^2}$
15. $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
16. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,csc} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Aturan Rantai

Jika $y=f(u)$ dapat diturunkan, dan $u=g(x)$ juga dapat diturunkan $(y=(f\circ g)(x))$, maka

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

Contoh

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari:

1. $y=\sin x^3$
2. $y=\sin^3 x$
3. $y=\frac{1}{(2x+1)^2}$

Latihan

Tentukan turunan pertama fungsi-fungsi yang diberikan sebagai berikut

1. $y=4x^3-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-3^x+7$

   $\left(y'=12x^2-5\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}-3^x\ln 3\right)$

2. $f(m)=3m^2\ \ln m$

   $\left(f'(m)=6m\ln m+3m\right)$

Latihan …

3. $y=\frac{x}{2x+1}$

   $\left(y'=\frac{1}{(2x+1)^2}\right)$

4. $y=\frac{5e^x-2x^3}{\sqrt{x}+1}$

   $\left(y'=\frac{(5e^x-6x^2)(\sqrt{x}+1)-(5e^x-2x^3)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{x}+1)^2}\right)$

5. $y=\ln^2(\sin 4x^2)$

   $\left(y'=2\ln(\sin 4x^2)\frac{1}{\sin 4x^2}\cos 4x^2(8x)\right)$

Pertemuan 11

Turunan Fungsi (Lanjutan)

Turunan Fungsi Implisit

- Fungsi implisit adalah fungsi yang tidak secara jelas membedakan variabel bebas dan variabel tak bebasnya, biasanya dinyatakan dalam bentuk $f(x,y)=0$.
- Untuk mencari turunan fungsi implisit digunakan teknik yang disebut penurunan fungsi implisit

Langkah Mendapatkan Turunan Suatu Fungsi Implisit

1. ubah $f(x,y)=0$ menjadi $y=g(x)$ atau $x=h(y)$ (jika mungkin), maka untuk mendapatkan $\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{dx}{dy}$ tinggal menurunkan $y=g(x)$ atau $x=h(y)$ seperti fungsi eksplisit.

Langkah Mendapatkan Turunan Suatu Fungsi Implisit …

2. jika langkah 1 tidak mungkin dilakukan, maka untuk mendapatkan

   a. $\frac{dy}{dx}$, anggap $y=g(x)$, turunkan $f(x,y)=0$ terhadap x dan y dengan mengingat $y=g(x)$ sehingga setiap menurunkan fungsi y harus dikalikan $\frac{dy}{dx}$ (aturan rantai), sederhanakan.

Langkah Mendapatkan Turunan Suatu Fungsi Implisit …

b. $\frac{dx}{dy}$, anggap $x = h(y)$, turunkan $f(x,y) = 0$ terhadap x dan y dengan mengingat $x = h(y)$ sehingga setiap menurunkan fungsi x harus dikalikan $\frac{dx}{dy}$ (aturan rantai), kemudian sederhanakan

Contoh

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi-fungsi berikut :

1. $2x^3 - y^2 = 4x(y-1)$
2. $x\cos y - y\sin x = 4$

Turunan Fungsi Berbentuk $y = f(x)^{g(x)}$

Langkah-langkah menurunkan fungsi berbentuk $y = [f(x)]^{g(x)}$:

1. Ubah fungsi $y = [f(x)]^{g(x)}$ dengan melogaritma naturalkan kedua ruas sehingga menjadi $\ln y = g(x)\ln(f(x))$.
2. Turunkan fungsi hasil langkah pertama dengan menggunakan teknik penurunan fungsi implisit.

Contoh

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Turunan Tingkat Tinggi

Turunan dari $y = f(x)$ yaitu $y' = \frac{dy}{dx}$ adalah turunan pertama dari y terhadap x. Turunan pertama dari y mungkin juga dapat diturunkan dan turunannya adalah

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

disebut turunan kedua y terhadap x.

Turunan Tingkat Tinggi …

Jika y'' dapat diturunkan maka turunannya adalah

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

disebut turunan ketiga y terhadap x.

Turunan Tingkat Tinggi …

Seterusnya hingga, jika y mempunyai turunan-turunan yang dapat diturunkan maka disebut turunan ke-n dari y terhadap x, untuk n bilangan bulat positif.

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Contoh

Tentukan y'' dari $y = 7 - x^2 \ln x$

Sifat dan Rumus Turunan

Jika $u=u(x)$ dan $v=v(x)$, maka

1. $\frac{d}{dx}(c)=0$, c konstan
2. $\frac{d}{dx}\left(u^n\right)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u \pm v)=\frac{d}{dx}(u)\pm\frac{d}{dx}(v)$
4. $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}}{v^2}, v \neq 0$

Sifat dan Rumus Turunan …

5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}}{v^2}, v \neq 0$
6. $\frac{d}{dx}(\sin u)=\cos u\,\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}(\cos u)=-\sin u\,\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx}(\tan u)=\sec^2 u\,\frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx}(\cot u)=-\csc^2 u\,\frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx}(\sec u)=\sec u\,\tan u\,\frac{du}{dx}$

Sifat dan Rumus Turunan …

11. $\frac{d}{dx}(\csc u)=-\csc u\,\cot u\,\frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx}({}^{a}\log u)=\frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx}(a^u)=a^u(\ln a)\frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}(e^u)=e^u\frac{du}{dx}$

Sifat dan Rumus Turunan …

16. $\frac{d}{dx}(\arcsin u)=\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $\frac{d}{dx}(\arccos u)=\frac{-\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$
18. $\frac{d}{dx}(\arctan u)=\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$
19. $\frac{d}{dx}(\text{arc}\cot u)=\frac{-\frac{du}{dx}}{1+u^2}$

Sifat dan Rumus Turunan …

19. $\frac{d}{dx}(\text{arc cot } u) = \frac{-\frac{du}{dx}}{1+u^2}$

20. $\frac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$

21. $\frac{d}{dx}(\text{arc csc } u) = \frac{-\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$

Latihan

1. Tentukan turunan pertama dan kedua dari : $y = 2\sin x + xe^{3x} + 7$

$$\left(\begin{array}{l} y' = 2\cos x + e^{3x} + 3xe^{3x} \\ y'' = -2\sin x + 3e^{3x} + 9xe^{3x} \end{array}\right)$$

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari :

a. $y = \ln^2(1-4x)$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{-8}{(1-4x)}\ln(1-4x)\right)$$

Latihan ...

b. $\begin{cases} y = \cos(5t^2) \\ x = \frac{1}{t} \end{cases}$

$$\left(\frac{dy}{dx} = 10t^3\sin(5t^2)\right)$$

c. $x^2y^3 - e^{2x-3y} = 5y + 11x$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{11+2e^{2x-3y}}{x^2 3y^2 + 3e^{2x-3y} - 5}\right)$$

d. $x = (\sin y)^x$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y\left(\frac{1}{x} - \ln\sin y\right)}{x\cos y}\right)$$

Pertemuan 13

Aplikasi Turunan

Laju Perubahan Yang Berkaitan

Jika $y = f(x)$, maka laju perubahan sesaat dari *y* tiap satuan perubahan dalam *x* di $x = x_1$ adalah $f'(x_1)$.

Laju Perubahan Yang Berkaitan …

Berikut ini adalah langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan laju perubahan yang berkaitan.

1. Sketsa gambar yang berhubungan dengan permasalahan, berikan variabel dan konstantanya
2. Tuliskan informasi numerik yang diberikan.

Laju Perubahan Yang Berkaitan …

3. Tuliskan apa yang akan dicari (nyatakan dalam turunan).
4. Tuliskan persamaan yang menghubungkan variabel yang diberikan.
5. Turunkan persamaan langkah 4, sesuaikan dengan langkah 3
6. Substitusikan informasi numerik yang diketahui

Laju Perubahan Yang Berkaitan …

Selain langkah di atas yang perlu diperhatikan adalah laju perubahan dinyatakan dengan turunan,

- jika kuantitas suatu variabel bertambah maka turunan variabel tersebut bernilai positif,
- jika kuantitas suatu variabel berkurang maka turunan variabel tersebut bernilai negatif.

Contoh

Sebuah bak air berbentuk tabung dengan tinggi 10 cm dan jari-jari alasnya 5 cm. Jika mula-mula berisi penuh air, kemudian air dikeluarkan dengan laju 2 cm^3/menit, berapa laju turunnya ketinggian air di dalam bak pada saat ketinggian air 5 cm.

Latihan

1. Sebuah balon kecil dilepas pada jarak 150 dari seorang pengamat yang berdiri di tanah. Jika balon naik secara lurus ke atas dengan laju 8 feet perdetik, seberapa cepat jarak antara pengamat dan balon bertambah pada waktu balon pada ketinggian 50 feet?

($\frac{8}{\sqrt{10}}$ feet per detik)

Latihan ...

2. Air dituangkan ke dalam bak berbentuk kerucut dengan laju 8 feet kubik per menit. Jika tinggi bak adalah 12 feet dan jari-jari permukaan atas adalah 6 feet, seberapa cepat permukaan air naik ketika kedalaman air adalah 4 feet?

($\frac{2}{\pi}$ feet per menit)

Latihan ...

3. Rusuk sebuah kubus bertambah panjang dengan laju 3 inci/detik, seberapa cepat volume kubus bertambah pada saat panjang rusuk 12 inci ?

$\left(1296 \text{ inci}^3/\text{det}\right)$

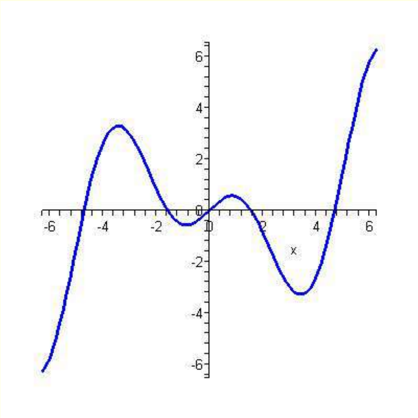
Pertemuan 14

Aplikasi Turunan (Lanjutan)

Maksimum dan Minimum Fungsi

Grafik atau kurva dari suatu fungsi mungkin fluktuatif atau menunjukkan gejala turun naik. Jadi mungkin kita dapatkan nilai maksimum dan minimum dalam sebuah kurva fungsi. Definisi dari nilai maksimum dan minimum adalah sebagai berikut:

Maksimum dan Minimum Fungsi …



Nilai Ekstrim

Misalkan fungsi *f* mempunyai domain selang *I* dan titik $c \in I$.

a. Nilai $f(c)$ disebut nilai maksimum jika $f(c) \geq f(x)$, setiap $x \in I$.

b. Nilai $f(c)$ disebut nilai minimum jika $f(c) \leq f(x)$, setiap $x \in I$.

c. Nilai $f(c)$ disebut nilai ekstrim fungsi *f* di *I* jika $f(c)$ nilai maksimum atau nilai minimum.

Titik Kritis

Misalkan fungsi f didefinisikan pada selang I yang memuat c. Titik c disebut titik kritis dari fungsi f jika memenuhi salah satu berikut ini:

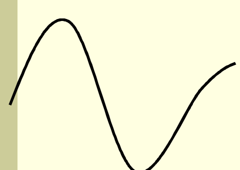
1. Titik ujung selang I.
2. Titik stasioner dari fungsi f (yaitu $f'(c)=0$).
3. Titik singular dari fungsi f (yaitu $f'(c)$ tidak ada).

Teorema Nilai Ekstrim

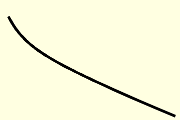
Misalkan fungsi f didefinisikan pada selang I yang memuat c. Jika $f(c)$ nilai ekstrim, maka c haruslah berupa suatu titik kritis.

Jaminan keujudan nilai estrim terdapat pada teorema berikut ini.

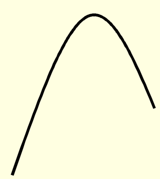
Jika fungsi f kontinu pada selang tutup $I = [a,b]$ maka f mencapai nilai maksimum dan minimum pada suatu titik di selang tersebut.



Maksimum & minimum
di tengah kurva



Maksimum & minimum pada titik ujung



Maksimum di tengah kurva, minimum di titik ujung

Menentukan Nilai Ekstrim Pada Selang Tertutup

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang tutup $I = [a,b]$. Menentukan nilai ekstrim f dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan semua titik kritis dari fungsi f pada selang I.
2. Hitung semua nilai $f(x)$, dengan x titik kritis.

Menentukan Nilai Ekstrim Pada Selang Tertutup ...

3. Nilai fungsi yang terbesar dari langkah 2 disebut nilai maksimum. Nilai fungsi yang terkecil dari langkah 2 disebut nilai minimum.

Contoh

1. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $s(t) = \cos 2t + 4\cos t$, dengan

$$I = [0, \frac{3}{2}\pi].$$

Contoh …

2. Seorang peternak mempunyai kawat 80 meter. Peternak tersebut akan membuat tiga kandang identik yang dipagari oleh kawat. Berapa lebar dan panjang pagar harus dibuat agar luas daerah yang dipagari maksimum ?

Latihan ...

Tentukan dua bilangan yang hasil kalinya -16 dan jumlah kuadratnya minimum. (-4 dan 4)

Tentukan ukuran silinder tegak dengan volume sebesar mungkin yang dapat dibuat di dalam suatu kerucut lingkaran tegak yang jari-jarinya 5 cm dan tingginya 12 cm.

$(V_s = \frac{400}{9}\pi \quad , r_s = \frac{10}{3} \quad h_s = 4)$