

ISSN : 1412 - 72818

Volume 2

Nomor 1, Januari - Juli 2013

# JURNAL MATEMATIKA

Journal of Mathematics

Penanggung Jawab :  
Prof. Drs. Win Darmanto, M.Si., Ph.D.

Dewan Redaksi :  
- Dr. Mirwanto, M.Si. (Ketua)  
- Drs. Eko Tjahjono, M.Si. (Wakil Ketua)

Anggota :  
- Dr. Fatmawati, M.Si.  
- Sunilau

Jurnal Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga  
Jl. Mulyorejo Kampus C UNAIR, Surabaya-Indonesia  
telp : +62-31-592 36501  
Kode Pos : 60115  
Fax : +62-31-592 36502, +62-31-592 36503  
E-mail : [mathe@ft.unair.ac.id](mailto:mathe@ft.unair.ac.id)



Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga  
Surabaya, Indonesia

## DAFTAR ISI

Achmad Romansyah, Moh. Imam Utoyo, Inna Kuswandari	PENYELESAIAN SISTEM LINIER FRAKSIONAL WAKTU KONTINU	1-5
Anisa Muthiatul Husnah, Suliyanto, Toha Saifudin	Pemodelan Demam Berdarah Dengue di Surabaya dengan Pendekatan Mixed Geographically Weighted Poisson Regression	6-15
Febri K.D.K.W, Lilie Susilowati, Inna Kuswandari, Hazrul Iswadi	Dimensi Metrik dan Bilangan Pembeda Terhubung dari Graf Piramida dan Graf Piramida Terpancung	16-25
Friska Panggabean, Suliyanto, Toha Saifudin	Estimasi Model Regresi Panel Poisson dengan <i>Conditional Maximum Likelihood</i>	26-42
Maulida Syarifah, Fatmawati, Yayuk Wahyuni	<i>Model Matematika Penyebaran HIV/AIDS dalam Tubuh Manusia dengan Faktor Respon Imun</i>	43-53
Ratnaning Palupi, Lilie Susilowati, Nenik Estuningsih, Hazrul Iswadi	Bilangan Dominasi Lokasi Metrik pada Graf Kisi	54-61
Rizky Eka Abdullah, Fatmawati, Windarto	MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN PENGARUH MIGRASI	62-72
Yuniati Mahmudah, Fatmawati, Yayuk Wahyuni	Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV dengan Koinfeksi Kolera	73-80
Eko Prasetyo, Lilie Susilowati, Nenik Estuningsih, Hazrul Iswadi, Miswanto	Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi Graf Buku Bertumpuk	81-89
Welly Agus Budiono, Herry Suprajitno, Miswanto	PENYELESAIAN AIRLINE CREW SCHEDULING PROBLEM BIKRITERIA MENGGUNAKAN FIREFLY ALGORITHM	90-97

# Dimensi Metrik dan Bilangan Pembeda Terhubung dari Graf Piramida dan Graf Piramida Terpancung

Febri K.D.K.W<sup>1</sup>, Liliek Susilowati<sup>1</sup>, Inna Kuswandari<sup>1</sup> & Hazrul Iswadi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Airlangga

<sup>2</sup>Departemen MIPA, Gedung TG Lantai 6

Universitas Surabaya

[ebi742@gmail.com](mailto:ebi742@gmail.com)

**Abstract.** Let  $G$  is connected graph and  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset V(G)$ . The representation a vertex  $v \in V(G)$  with respect to  $W$  is the ordered  $k$ -tuple  $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$  where  $d(v, w)$  represents the distance between vertices  $v$  and  $w$ . The set  $W$  is called a resolving set for  $G$  if every vertex of  $G$  has a distinct representation. A resolving set containing a minimum number of vertices is called basis for  $G$ . The metric dimension of  $G$  denoted  $\dim(G)$ , is the number of vertices in a basis of  $G$ . A resolving set  $W$  of  $G$  is connected if the subgraph induced by  $W$  is a connected subgraph of  $G$ . The connected resolving number is the minimum cardinality of a connected resolving set in a graph  $G$ , denoted by  $cr(G)$ . In this paper, determined metric dimension and connected resolving set number of pyramid graph and truncated pyramid graph. The pyramid graph is form by snake graph, denoted by  $Pr_n$  and truncated pyramid graph is form by deleting vertex of vertices pyramid graph. The result from this paper are  $\dim(Pr_n) = 2$ ,  $\dim(Pr_n^m) = 2$ ,  $cr(Pr_n) = \frac{n+3}{2}$  for  $n = 1, 3, 5$ , and  $7$ ,  $cr(Pr_n) = \frac{n}{2} + 2$  for  $n = 2, 4$ , and  $6$ ,  $cr(Pr_1^1) = 2$ ,  $cr(Pr_1^2) = 2$ , and  $cr(Pr_2^2) = 3$ .

**Keywords:** basis; metric dimension; connected resolving set number; pyramid graph

## 1. Pendahuluan

Graf  $G$  didefinisikan sebagai himpunan titik tak kosong  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$  yang menghubungkan dua titik tak terurut pada  $V(G)$ . Kardinalitas  $V(G)$ , dinotasikan dengan  $|V(G)|$  disebut ordo dari graf  $G$ . Graf  $G$  dikatakan terhubung jika setiap dua titik  $u$  dan  $v$  di graf  $G$  selalu dihubungkan dengan suatu lintasan. Jarak antara dua titik  $u$  dan  $v$  dinotasikan  $d(u, v)$  di suatu graf terhubung  $G$  adalah panjang lintasan terpendek dari  $u$  ke  $v$  di  $G$ . [3]

Misalkan  $G$  graf terhubung dan himpunan  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$ . Representasi titik  $v \in V(G)$ , terhadap  $W$  adalah pasangan terurut  $k$ -tuple  $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$ . Himpunan  $W$  disebut himpunan pembeda dari graf  $G$  jika representasi setiap titik  $v$  di  $G$  terhadap himpunan  $W$  berbeda. Himpunan pembeda dari graf  $G$  yang mempunyai kardinalitas minimum disebut basis dari graf  $G$  dan kardinalitas basis disebut dimensi metrik dari graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $\dim(G)$ . Himpunan pembeda  $W$  dari  $G$  terhubung jika subgraf yang terinduksi oleh  $W$  merupakan suatu subgraf terhubung dari  $G$ . Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda terhubung disebut bilangan pembeda terhubung dari graf  $G$  dan dinotasikan dengan  $cr(G)$  [1].

Konsep tentang dimensi metrik pada graf diperkenalkan pertama kali oleh Slater pada tahun 1975 dan Harary dkk pada tahun 1976. Mereka memperkenalkan ide tentang himpunan pembeda, basis, dan dimensi metrik. Kemudian pada tahun 2000, Chartrand dkk mengembangkan dengan baik tentang konsep dimensi metrik suatu graf serta memunculkan keterkaitan dengan bidang lainnya, salah satunya adalah dalam bidang komputer [7]. Sejak tahun 2000, kajian tentang himpunan pembeda, basis,

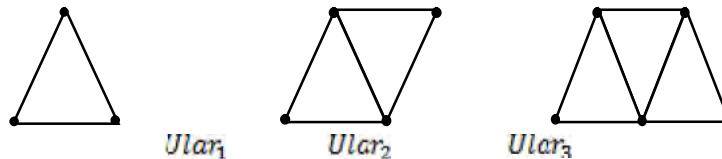
dandimensimetriksuatugrafmendapatkanbanyakperhatiandariahligrafteori. Padapenelitianini, ditentukandimensimetrikanbilanganpembedaterhubungdarigrafpiramidadangrafpiramida terpancung.

## 2. Pembahasan

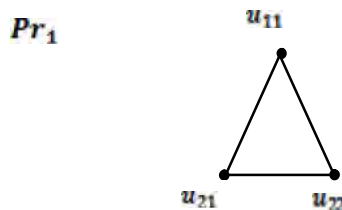
Pengubinanadalahrangkaiandarisegabanyak yang digunakanuntukmenutupisuatubidangdatartertentuanpatumpangtindihdantanpaadanyaperpotongan.

Subgrafberhingadarihasilpengubinandisebutdengangrafubin[4]. Misalkanterdapatatupe ngubinanpadabidangdatarmenggunakansegitigasamasisi yang kongruen, duasegitigadikatakanterhubungjikaduasegitigatersebutbersekutupadasatusisi. Misalkan  $T$  adalahkumpulansegitiga-segitiga yang terhubung, maka  $T$  adalahgraferhubungdengansikelterpendektigadanmasing-masingsegitiga paling sedikitterdapatatusisi yang bersekutudengansisisegitiga yang lainnya. Kumpulan segitigaterhubungdisebuttriomino.  $T$  disebut  $n$ -triominojika  $T$  merupakan  $n$  buah graf ubin. Graf ular, graf piramida, dan graf piramida terpancung terbentuk dari satu buah graf ubin sehingga ketiga graf tersebut merupakan 1-triomino. [6]

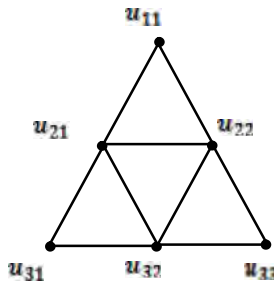
**Definisi 2.2.1** Graf ular dengan panjang  $k$  yang dinotasikan dengan  $Ular_k$  merupakan 1-triomino yang dibentuk dari  $k$  segitiga samasisi dengan cara berikut:



**Definisi 2.2.2** Graf piramida dengan tingginya  $n$ ,  $n \geq 1$  ditulis  $Pr_n$  merupakan 1-triomino, yang dibentuk dengan cara berikut:

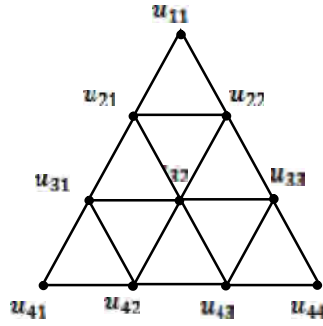


$Pr_1$  terdiri dari  $Ular_1$ , dengan ordo dari  $Pr_1$  adalah 3.



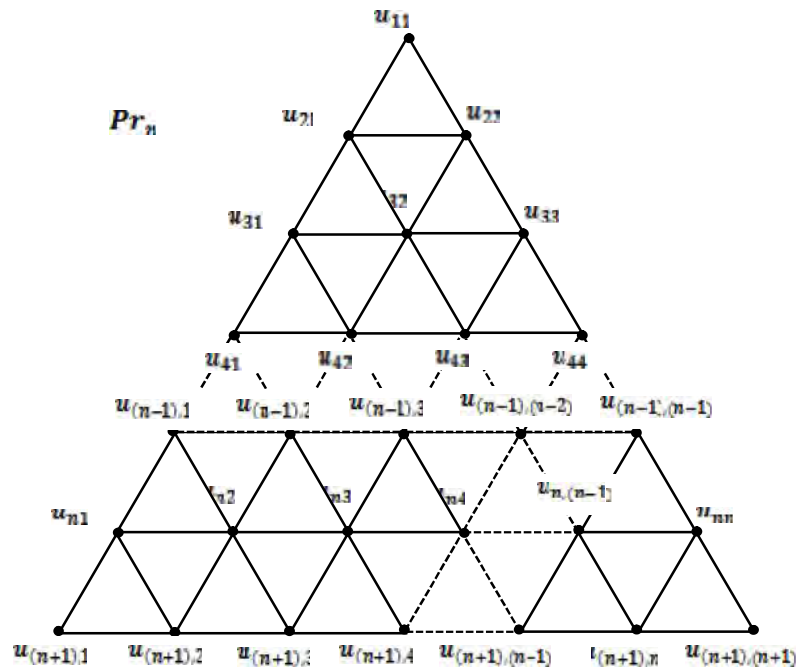
$Pr_2$  terdiri dari  $Ular_1$  dan  $Ular_3$ , dengan ordo dari  $Pr_2$  adalah 6.

$Pr_3$



$Pr_3$  terdiri dari  $Ular_1$ ,  $Ular_3$ , dan  $Ular_5$ , dengan ordo dari  $Pr_3$  adalah 10.

$Pr_n$



Graf piramida  $Pr_n$  dengan  $V(Pr_n) = \{u_{ij}, i = 1, 2, 3, \dots, n+1 \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, i\}$  dan

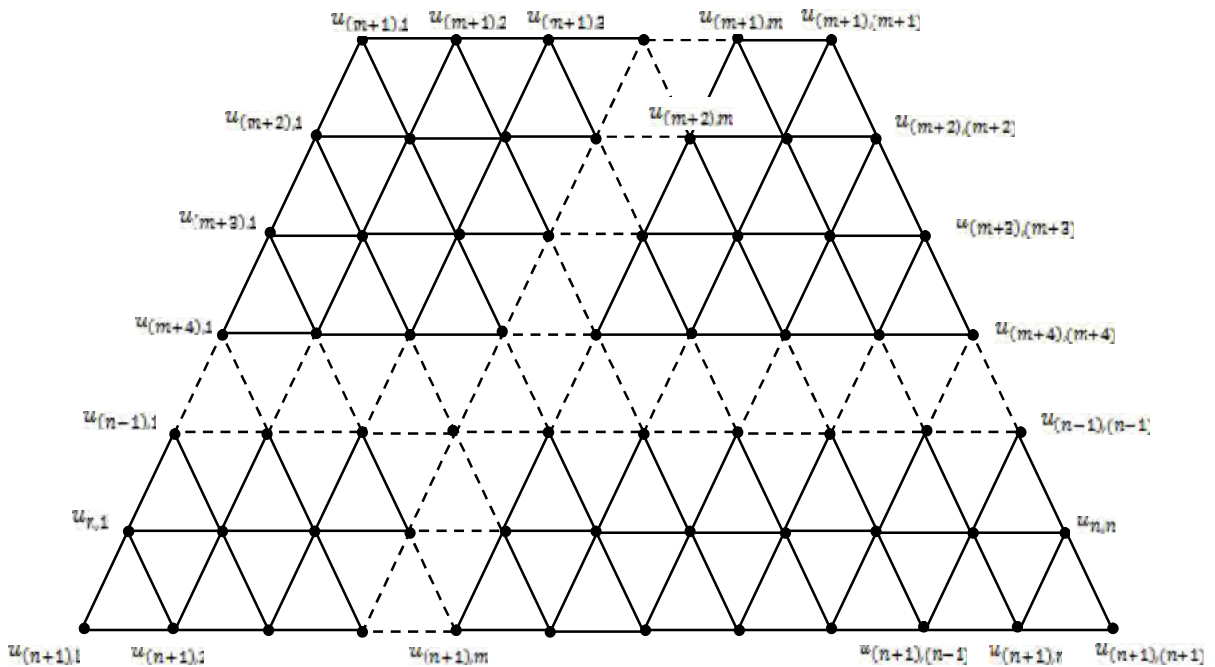
$$E(Pr_n) = \{u_{ij}u_{kl}, i = 1, 2, 3, \dots, n+1, j = 1, 2, 3, \dots, i \text{ dan}$$

$k = i, i+1, l = j, j+1, k \leq n+1, u_{ij} \neq u_{kl}\}$ .  $Pr_n$  terdiri dari  $Ular_1, Ular_3, Ular_5, .$

$..$ , dandan  $Ular_{2n-1}$ , dengan ordo dari  $Pr_n$  adalah  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ .

Graf piramida terpancung adalah graf yang dibentuk dari penghapusan titik pada puncak segitiga  $Pr_n$  dan dinotasikan  $Pr_c^m$ , dengan  $m$  menunjukkan banyaknya lapisan graf piramida  $Pr_n$  yang dipancung dan  $c = n - m$

adalah tinggi graf piramida terpancung. Graf piramida  $Pr_c^m$  disajikan pada gambar berikutini:



Graf piramidaterpancung  $Pr_c^m$  dengan  $V(Pr_c^m) = \{u_{ij}, i = m+1, m+2, \dots, n+1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, i\}$  dan  $E(Pr_c^m) = \{u_{ij}u_{kl}, i = m+1, m+2, m+3, \dots, n+1, j = 1, 2, 3, \dots, i \text{ dan } k = i, i+1, l = j, j+1, l < k < n+1, u_{ij} \neq u_{kl}\}$ . Ordo dari graf  $Pr_c^m$  adalah  $\frac{1}{2}(c+2m+2)(c+1)$ .

**Lemma 1** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dengan ordo  $n$ . Graf  $G$  mempunyai dimensi metrik 1 jika dan hanya jika graf  $G$  adalah  $P_n$ . [2]

**Lemma 2** Misalkan  $G$  graf terhubung dan  $S' \subseteq V(G)$ . Jika  $S'$  memuat sebuah himpunan pembeda pada  $G$  sebagai himpunan bagiannya, maka  $S'$  juga merupakan himpunan pembeda. [5]

Berikutini adalah hasil dari  $\dim(Pr_n)$  dan  $\dim(Pr_c^m)$  yang

disajikan dalam bentuk teorema.

**Teorema 2.1**  $\dim(Pr_n) = 2$

**Bukti:** Dipilih himpunan terurut  $W = \{u_{1,1}, u_{(n+1),1}\} \subset V(Pr_n)$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $Pr_n$ . Representasi setiap titik  $u_{ij} \in V(Pr_n)$  terhadap himpunan  $W$  adalah:

$$r(u_{ij}|W) = (i-1, n-i+j)$$

Karena representasi setiap titik  $u_{ij}$  di  $Pr_n$  terhadap himpunan  $W$  berbeda maka  $W$  merupakan himpunan pembeda dari  $Pr_n$ . Berdasarkan Lemma 1, karena graf piramida  $Pr_n$

bukan merupakan graf lintasan maka  $\dim(Pr_n) \geq 2$  sehingga himpunan  $W$  merupakan himpunan pembeda minimal. Jadi  $W$  merupakan basis dari  $Pr_n$  dan terbukti bahwa  $\dim(Pr_n)=2$ .

**Teorema 2.2**  $\dim(Pr_c^m) = 2$

**Bukti:** Dipilih himpunan terurut  $= \{u_{(m+1,1)}, u_{(n+1,1)}\} \subset V(Pr_c^m)$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $Pr_2$ . Representasi setiap titik  $u_{ij} \in Pr_c^m$  terhadap himpunan  $W$  adalah:

$$r(u_{ij}|W) = \begin{cases} (j-1, n-(i-j)), & \text{untuk } i-j \leq m \\ (i-(m+1), n-(i-j)), & \text{untuk } i-j > m \end{cases}$$

Karena representasi setiap titik  $u_{ij}$  di  $Pr_c^m$  terhadap himpunan  $W$  berbeda maka  $W$  merupakan himpunan pembeda dari  $Pr_c^m$ . Berdasarkan Lemma 2.3.3, karena graf piramida terpancung  $Pr_c^m$  bukan merupakan graf lintasan maka  $\dim(Pr_c^m) > 2$  sehingga himpunan  $W$  merupakan himpunan pembeda minimal. Jadi  $W$  merupakan basis dari graf piramida terpancung  $Pr_c^m$  dan terbukti bahwa  $\dim(Pr_c^m)=2$ .

Setelah menentukan dimensi metrik dari graf piramida  $Pr_n$  dan graf piramida terpancung  $Pr_c^m$ , selanjutnya ditentukan bilangan pembeda terhubung dari graf piramida  $Pr_n$  dan graf piramida terpancung  $Pr_c^m$ . Berikut ini disajikan beberapa lemma untuk mendukung penentuan bilangan pembeda terhubung dari graf piramida  $Pr_n$  dan graf piramida terpancung  $Pr_n$ .

**Lemma 2.3** Misalkan  $W \subseteq V(Pr_n)$ , jika anggota himpunan  $W$  terdiri dari tepat satu titik ujung dan titik-titik segaris dengannya maka  $W$  bukan merupakan himpunan pembeda.

**Bukti:** Misalkan diambil sebarang  $W \subseteq V(G)$  yang anggota dari  $W$  terdiri dari titik-titik segaris tanpa titik ujung, maka terdapat 2 titik di  $G$  yang mempunyai representasi yang sama terhadap himpunan  $W$ . Himpunan  $W$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned} W &= \{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m1}\}, & m \leq n & & W &= \{u_{(n+1,1)}, u_{n1}, \dots, u_{p1}\}, & p < 1 \\ W &= \{u_{11}, u_{22}, \dots, u_{kk}\}, & k \leq n & & W &= \{u_{(n+1),(n+1)}, u_{nn}, \dots, u_{q1}\}, & q < 1 \\ W &= \{u_{(n+1,1)}, u_{(n+1,2)}, \dots, u_{(n+1,l)}\}, & l \leq n & & W &= \{u_{(n+1),(n+1)}, u_{(n+1,n)}, \dots, u_{r1}\}, & r < 1 \end{aligned}$$

Tanpa mengurangi keumuman bukti,

dipilih himpunan  $W = \{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m1}\}$  mengakibatkan

$r(u_{(m+1,1)}|W) = r(u_{(m+1,2)}|W)$ . Karena  $r(u_{(m+1,1)}|W) = r(u_{(m+1,2)}|W)$  maka himpunan  $W$  tersebut bukan merupakan himpunan pembeda dari  $Pr_n$ .

**Lemma 2.4** Misalkan  $W \subseteq V(Pr_n)$ , jika anggota himpunan  $W$  terdiri dari titik-titik segaris tanpa memuat titik ujung maka  $W$  bukan merupakan himpunan pembeda.

**Bukti:** Diambil sebarang  $W \subseteq V(G)$  yang anggota dari  $W$  terdiri dari titik-titik segaris tanpa titik ujung dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $Pr_n$ . Himpunan  $W = \{u_{ij} | i, j \neq 1; i, j \neq n+1, u_{ij} \text{ segaris}\}$ . Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan dipilih himpunan  $W = \{u_{22}, u_{32}, \dots, u_{c2}\}$ ,  $c \leq n$  mengakibatkan  $r(u_{21}|W) = r(u_{33}|W)$ . Karena  $r(u_{21}|W) = r(u_{33}|W)$  maka himpunan  $W$  tersebut bukan himpunan pembeda dari  $Pr_n$ .

**Lemma 2.5**  $cr(Pr_1) = 2$

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{11}, u_{21}\} \subset V(P_{r_1})$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $P_{r_1}$ . Representasi setiap titik di  $P_{r_1}$  terhadap himpunan  $W$  sebagai berikut:

$$r(u_{11}|W) = (0,1) \qquad r(u_{21}|W) = (1,0) \qquad r(u_{22}|W) = (1,1)$$

Karena representasi setiap titik di  $P_{r_1}$  terhadap himpunan  $W$  tersebut berbeda maka himpunan  $W$  tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung dari  $P_{r_1}$ . Berdasarkan Lemma 1, karena  $P_{r_1}$  bukan merupakan graf lintasan maka  $\dim(P_{r_1}) \geq 2$  sehingga himpunan  $W$  tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari  $P_{r_1}$  dan terbukti bahwa  $cr(P_{r_1}) = 2$ .

**Lemma 2.6**  $cr(P_{r_2}) = 3$

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\} \subset V(P_{r_2})$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $P_{r_2}$ . Representasi setiap titik di  $P_{r_2}$  terhadap himpunan  $W$  sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} r(u_{11}|W) = (1,1,2) & r(u_{22}|W) = (1,0,2) & r(u_{32}|W) = (1,1,1) \\ r(u_{21}|W) = (0,1,1) & r(u_{31}|W) = (1,2,0) & r(u_{33}|W) = (2,1,2) \end{array}$$

Representasi setiap titik di  $P_{r_2}$  terhadap himpunan  $W$  berbeda sehingga himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_{r_2}$ . Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan  $W \subset V(P_{r_2})$  dengan  $|W| = 2$ . Berdasarkan Lemma 2.3 dan Lemma 2.4, himpunan  $W \subset V(P_{r_2})$  dengan  $|W| = 2$  bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_{r_2}$ . Representasi setiap titik di  $P_{r_2}$  terhadap himpunan  $W$  dengan  $|W| = 2$  disajikan pada Lampiran 1. Karena himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dan semua himpunan  $W$  dengan  $|W| = 2$  bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari  $P_{r_2}$  maka himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf  $P_{r_2}$  dan terbukti bahwa  $cr(P_{r_2}) = 3$ .

**Lemma 2.7**  $cr(P_{r_3}) = 3$

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\} \subset V(P_{r_3})$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $P_{r_3}$ . Representasi setiap titik di  $P_{r_3}$  terhadap himpunan  $W$  diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di  $P_{r_3}$  terhadap himpunan  $W$  berbeda maka himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_{r_3}$ . Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan  $W \subset V(P_{r_3})$  dengan  $|W| = 2$ . Berdasarkan Lemma 2.3 dan Lemma 2.4, himpunan  $W \subset V(P_{r_3})$  dengan  $|W| = 2$  bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_{r_3}$ . Representasi setiap titik di  $P_{r_3}$  terhadap himpunan  $W$  dengan  $|W| = 2$  disajikan pada Lampiran 2. Karena himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dan semua himpunan  $W$  dengan  $|W| = 2$  bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari  $P_{r_3}$  maka himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf  $P_{r_3}$  dan terbukti bahwa  $cr(P_{r_3}) = 3$ .

**Lemma 2.8**  $cr(P_{r_4}) = 4$

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\} \subset V(P_{r_4})$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $P_{r_4}$ . Representasi setiap titik di  $P_{r_4}$  terhadap himpunan  $W$  diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di  $P_{r_4}$  terhadap himpunan  $W$  berbeda maka himpunan  $W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_{r_4}$ . Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan  $W \subset V(P_{r_4})$  dengan  $|W| = 3$ . Berdasarkan Lampiran 2, semua himpunan  $W \subset V(P_{r_4})$  dengan  $|W| = 3$  bukan merupakan himpunan pembeda karena selalunya terdapat 2 titik pada graf  $P_{r_4}$  yang mempunyai representasi sama terhadap himpunan  $W$  tersebut.



Sehingga himpunan  $W \subset V(P_r_4)$  dengan  $|W| = 3$  bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_r_4$ . Terbuktibahwa  $W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf  $P_r_4$  dan  $cr(P_r_4) = 4$ .

**Lemma 2.9**  $cr(P_r_5) = 4$

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\} \subset V(P_r_5)$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $P_r_5$ . Representasi setiap titik di  $P_r_5$  terhadap himpunan  $W$  diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di  $P_r_5$  terhadap himpunan  $W$  berbeda maka himpunan  $W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_r_5$ . Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan  $W \subset V(P_r_5)$  dengan  $|W| = 3$ . Semua himpunan  $W \subset V(P_r_5)$  dengan  $|W| = 3$  mempunyai karakterisasi yang sama seperti himpunan  $W \subset V(P_r_4)$  dengan  $|W| = 3$ . Karena himpunan  $W \subset V(P_r_4)$  dengan  $|W| = 3$  bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari  $P_r_4$  maka himpunan  $W \subset V(P_r_5)$  dengan  $|W| = 3$  juga bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_r_5$ . Jadi terbuktibahwa himpunan  $W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf  $P_r_5$  dan  $cr(P_r_5) = 4$ .

**Lemma 2.10**  $cr(P_r_6) = 5$

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{51}\} \subset V(P_r_6)$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $P_r_6$ . Representasi setiap titik di  $P_r_6$  terhadap himpunan  $W$  diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di  $P_r_6$  terhadap himpunan  $W$  berbeda maka himpunan  $W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{51}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_r_6$ . Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan  $W \subset V(P_r_6)$ , dengan  $|W| = 4$ . Berdasarkan Lampiran 3, semua himpunan  $W \subset V(P_r_6)$  dengan  $|W| = 4$  bukan merupakan himpunan pembeda karena selaluterdapat 2 titik pada graf  $P_r_6$  yang mempunyai representasi sama terhadap himpunan  $W$  tersebut. Sehingga himpunan  $W \subset V(P_r_6)$  dengan  $|W| = 4$  bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_r_6$ . Jadi terbukti bahwa himpunan  $W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{51}\} \subset V(P_r_6)$  merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf  $P_r_6$  dan terbukti bahwa  $cr(P_r_6) = 5$ .

**Lemma 2.11**  $cr(P_r_7) = 5$

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{51}\} \subset V(P_r_7)$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $P_r_7$ . Representasi setiap titik di  $P_r_7$  terhadap himpunan  $W$  diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di  $P_r_7$  terhadap himpunan  $W$  berbeda maka himpunan  $W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{51}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_r_7$ . Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan  $W \subset V(P_r_7)$ , dengan  $|W| = 4$ . Semua himpunan  $W \subset V(P_r_7)$  dengan  $|W| = 4$  mempunyai karakterisasi yang sama seperti himpunan  $W \subset V(P_r_6)$  dengan  $|W| = 4$ . Karena himpunan  $W \subset V(P_r_6)$  dengan  $|W| = 4$  bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari  $P_r_6$  maka himpunan  $W \subset V(P_r_7)$  dengan  $|W| = 4$  juga bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf  $P_r_7$ . Jadi terbuktibahwa himpunan  $W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{51}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf  $P_r_7$  dan  $cr(P_r_7) = 5$ .

Dari Lemma 2.5 sampai dengan Lemma 2.11 dapat disimpulkan bahwa, bilangan pembeda dari graf piramida  $P_r_n$  untuk  $n \leq 7$  adalah,

$$cr(Pr_n) = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, & \text{untuk } n = 1, 3, 5, \text{ dan } 7 \\ \frac{n}{2} + 2, & \text{untuk } n = 2, 4, \text{ dan } 6 \end{cases}$$

Selanjutnyadapatkankonjekturbilanganpembedaterhubungdari grafpiramida  $Pr_n$  untuk  $n \in \mathbb{N}$ , yaitu:

**Konjektur 2.12** Bilanganpembedaterhubungdari grafpiramida  $Pr_n$  dengan  $n \leq 7$  adalah,

$$cr(Pr_n) = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2} + 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

denganhimpunanpembedaterhubungminimalnyaadalah,

$$W = \begin{cases} \{u_{\frac{n+1}{2},1}, u_{\frac{n+1}{2},2}, \dots, u_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}, u_{\frac{n+1}{2},1}\}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \{u_{\frac{n}{2}+1,1}, u_{\frac{n}{2}+1,2}, \dots, u_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}, u_{\frac{n}{2}+2,1}\}, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Setelahmenentukan  $cr(Pr_n)$ , untuk  $n \leq 7$ , selanjutnya disajikan beberapa lemma untuk bilangan pembeda terhubung dari graf piramida terpancung  $Pr_n^m$ .

**Lemma 2.13**  $cr(Pr_1^1) = 2$

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{21}, u_{31}\} \subset V(Pr_1^1)$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $Pr_1^1$ . Representasi setiap titik di  $Pr_1^1$  terhadap himpunan  $W$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(u_{21}|W) &= (0,1) & r(u_{32}|W) &= (1,1) \\ r(u_{22}|W) &= (1,2) & r(u_{33}|W) &= (2,2) \\ r(u_{31}|W) &= (1,0) \end{aligned}$$

Karenarepresentasisetiap titik di  $Pr_1^1$  terhadap himpunan  $W$  tersebut berbeda dan subgraf dari  $Pr_1^1$  yang terinduksi oleh  $W$  adalah subgraf terhubung maka himpunan  $W$  tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung dari  $Pr_1^1$ . Berdasarkan Lemma 2.3.3, himpunan  $W$  tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari  $Pr_1^1$  dan terbukti bahwa  $cr(Pr_1^1) = 2$ .

**Lemma 2.14**  $cr(Pr_1^2) = 2$ .

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{31}, u_{41}\} \subset V(Pr_1^2)$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $Pr_1^2$ . Representasi setiap titik di  $Pr_1^2$  terhadap himpunan  $W$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(u_{31}|W) &= (0,1) \\ r(u_{32}|W) &= (1,2) \\ r(u_{33}|W) &= (2,3) \\ r(u_{41}|W) &= (1,0) \\ r(u_{42}|W) &= (1,1) \\ r(u_{43}|W) &= (2,2) \\ r(u_{44}|W) &= (3,3) \end{aligned}$$

Karena representasi setiap titik di  $Pr_1^2$  terhadap himpunan  $W$  tersebut berbeda dan subgraf dari  $Pr_1^2$  yang terinduksi oleh  $W$  adalah subgraf terhubung maka himpunan  $W$  tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung dari  $Pr_1^2$ . Berdasarkan Lemma 2.3.3, karena  $Pr_1^2$  bukan merupakan graf lintasan maka himpunan  $W$  tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari  $Pr_1^2$  dan terbukti bahwa  $cr(Pr_1^2) = 2$ .

**Lemma 2.15**  $cr(Pr_2^1) = 3$ .

**Bukti:** Dipilih himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{33}\} \subset V(Pr_2^1)$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $Pr_2^1$ . Karena  $V(Pr_2^1) \subset V(Pr_3)$ , berdasarkan Lemma 4.3.4, maka  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{33}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung dari  $Pr_2^1$ . Diambil sebarang himpunan  $W \subset V(Pr_2^1)$  dengan  $|W| = 2$  dan titik-titik pada  $W$  tersebut membangun subgraf terhubung dari  $Pr_2^1$ . Semua kombinasi himpunan  $W$  tersebut selalu beranggotakan tepat satu titik ujung dan titik-titik segaris dengannya atau titik-titik segaris yang tidak memuat titik ujung. Berdasarkan Lemma 4.3.1 dan Lemma 4.3.2, himpunan  $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$  merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf  $Pr_2^1$  dan terbukti bahwa  $cr(Pr_2^1) = 3$ .

Dari Lemma 2.13, Lemma 2.14, dan Lemma 2.15 dapat disimpulkan bahwa bilangan pembeda terhubung dari graf piramida terpancung  $Pr_c^m$  untuk  $n = 2$  dan  $3$  adalah,

$$cr(Pr_c^m) = \begin{cases} c + 1, & \text{untuk } c > m \\ cr(Pr_n), & \text{untuk } c \leq m \end{cases}$$

Selanjutnya dapat dikemukakan konjektur bilangan pembeda terhubung dari graf piramida terpancung  $Pr_c^m$  untuk  $c, m \in \mathbb{N}$ , yaitu:

### Konjektur

**2.16** Bilangan pembeda terhubung dari graf piramida terpancung  $Pr_c^m$  adalah,

$$cr(Pr_c^m) = \begin{cases} c + 1, & \text{untuk } c > m \\ cr(Pr_n), & \text{untuk } c \leq m \end{cases}$$

dengan himpunan pembeda terhubungnya,

$$W = \begin{cases} \{u_{m+1,1}, u_{m+2,2}, \dots, u_{m+1,m+1}\}, & \text{untuk } c > m \\ \text{himpunan pembeda terhubung minimal dari } Pr_n, & \text{untuk } c \leq m \end{cases}$$

### 3. Kesimpulan

1. Graf piramida  $Pr_n$  dengan  $V(Pr_n) = \{u_{ij}, i = 1, 2, 3, \dots, n+1 \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, i\}$  dan  $E(Pr_n) = \{u_{ij}u_{kl}, i = 1, 2, 3, \dots, n+1, j = 1, 2, 3, \dots, i \text{ dan } k = i, i+1, l = j, j+1, k \leq n+1, u_{ij} \neq u_{kl}\}$ . Dimensi metrik dari graf piramida  $Pr_n$  adalah 2 dan basisnya adalah  $\{u_{11}, u_{(n+1),1}\}$ .
2. Graf piramidaterpancung  $Pr_c^m$  dengan  $V(Pr_c^m) = \{u_{ij}, i = m+1, m+2, \dots, n+1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, i\}$  dan  $E(Pr_c^m) = \{u_{ij}u_{kl}, i = m+1, m+2, m+3, \dots, n+1, j = 1, 2, 3, \dots, i \text{ dan } k = i, i+1, l = j, j+1, l \leq k \leq n+1, u_{ij} \neq u_{kl}\}$ . Dimensi metrik dari graf piramidaterpancung  $Pr_c^m$  adalah 2 dan basisnya adalah  $\{u_{(m+1),1}, u_{(n+1),1}\}$ .
3. Bilangan pembeda terhubung dari graf piramida  $Pr_n$  dengan  $n \leq 7$  adalah,

$$cr(Pr_n) = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2} + 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

4. Bilangan pembeda terhubung dari graf piramidaterpancung  $Pr_c^m$  untuk  $n = 2$  dan 3 adalah,

$$cr(Pr_c^m) = \begin{cases} c+1, & \text{untuk } c > m \\ cr(Pr_n), & \text{untuk } c \leq m \end{cases}$$

#### 4. Daftar Pustaka

- [1] Baskoroputro, Herolistra., *Dimensi Metrik dan Bilangan Pembeda Terhubung dari Amalgamasi-Sisi Siklus*. Matematika, Institut Teknologi Bandung, Bandung, 2009.
- [2] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson M.A., dan Oellermann, O.R., *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Appl. Math., 105: 5 – 7, 2000.
- [3] Chartrand, G. dan Lesniak, L., *Graphs and Digraph*, 3<sup>rd</sup> ed., Chapman & Hall, Florida, pp. 1-16, 2000.
- [4] Grunbaum, B. dan Shephard, G.C., *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman and Company, Newyork, pp. 58-64, 2007.
- [5] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., dan Simanjutak, R., *The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles*, An International Journal of Discrete and Combinatorial Mathematics. Utilitas Mathematica, 83, 2010.
- [6] Low, R.M. dan Lee, S.M., *On the integer-magic spectra of tessellation graphs*, Australian Journal of Combinatorics, 34: 195-210, 2004.
- [7] Manuel, P., Rajan, B., Rajasingh, I., dan M., Chris, *On minimum metric dimension of honeycomb networks*, Journal of Discrete Algorithms, 6: 20-27, 2000.