

ISSN : 1412 - 72818

Volume 2

Nomor 1, Januari - Juli 2013

# JURNAL MATEMATIKA

Journal of Mathematics

Penanggung Jawab :  
Prof. Drs. Win Darmanto, M.Si., Ph.D.

Dewan Redaksi :  
- Dr. Mirwanto, M.Si. (Ketua)  
- Drs. Eko Tjahjono, M.Si. (Wakil Ketua)

Anggota :  
- Dr. Fatmawati, M.Si.  
- Sunilau

Jurnal Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga  
Jl. Mulyorejo Kampus C UNAIR, Surabaya-Indonesia  
telp : +62-31-592 36501  
Kode Pos : 60115  
Fax : +62-31-592 36502, +62-31-592 36503  
E-mail : [mathe@ft.unair.ac.id](mailto:mathe@ft.unair.ac.id)



Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga  
Surabaya, Indonesia

## DAFTAR ISI

Achmad Romansyah, Moh. Imam Utoyo, Inna Kuswandari	PENYELESAIAN SISTEM LINIER FRAKSIONAL WAKTU KONTINU	1-5
Anisa Muthiatul Husnah, Suliyanto, Toha Saifudin	Pemodelan Demam Berdarah <i>Dengue</i> di Surabaya dengan Pendekatan <i>Mixed Geographically Weighted Poisson Regression</i>	6-15
Febri K.D.K.W, Lilie Susilowati, Inna Kuswandari, Hazrul Iswadi	Dimensi Metrik dan Bilangan Pembeda Terhubung dari Graf Piramida dan Graf Piramida Terpancung	16-25
Friska Panggabean, Suliyanto, Toha Saifudin	Estimasi Model Regresi Panel Poisson dengan <i>Conditional Maximum Likelihood</i>	26-42
Maulida Syarifah, Fatmawati, Yayuk Wahyuni	<i>Model Matematika Penyebaran HIV/AIDS dalam Tubuh Manusia dengan Faktor Respon Imun</i>	43-53
Ratnaning Palupi, Lilie Susilowati, Nenik Estuningsih, Hazrul Iswadi	Bilangan Dominasi Lokasi Metrik pada Graf Kisi	54-61
Rizky Eka Abdullah, Fatmawati, Windarto	MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN PENGARUH MIGRASI	62-72
Yuniati Mahmudah, Fatmawati, Yayuk Wahyuni	Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV dengan Koinfeksi Kolera	73-80
Eko Prasetyo, Lilie Susilowati, Nenik Estuningsih, Hazrul Iswadi, Miswanto	Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi Graf Buku Bertumpuk	81-89
Welly Agus Budiono, Herry Suprajitno, Miswanto	PENYELESAIAN AIRLINE CREW SCHEDULING PROBLEM BIKRITERIA MENGGUNAKAN FIREFLY ALGORITHM	90-97

## Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi Graf Buku Bertumpuk

Eko Prasetyo<sup>1</sup>, Liliek Susilowati<sup>1</sup>, Nenik Estuningsih<sup>1</sup> & Hazrul Iswadi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga

<sup>2</sup>Departemen MIPA, Gedung TG Lantai 6  
Universitas Surabaya  
ecoprast@live.com

**Abstract.** The aims of this research were to decide metric dimension and partition dimension on the stacked book graph  $B_{3,n}$  for  $n \geq 3$ . The stacked book graph  $B_{3,n}$  is formed by Cartesian product of star graph  $K_{1,3}$  and path graph  $P_n$ . To complete this study, is used characterization of metric dimension and partition dimension of path graph, lemma about the character of resolving set, resolving partition and some supporting observations of stacked book graph  $B_{3,n}$ . The each result about metric dimension and partition dimension of stacked book graph  $B_{3,n}$  is 3 for  $n \geq 3$ .

**Keywords:** *metric dimension; partition dimension; resolving set; resolving partition; stacked book graph*

### 14. Pendahuluan

Graf  $G$  didefinisikan sebagai himpunan titik tak kosong  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$  yang menghubungkan dan titik-tak terurut pada  $V(G)$ . Kardinalitas  $V(G)$ , dinotasikan dengan  $|V(G)|$  disebut ordo dari graf  $G$ . Graf  $G$  dikatakan terhubung jika setiap dua titik  $u$  dan  $v$  di graf  $G$  selalu dihubungkan dengan suatu lintasan. Jarak antara dua titik  $u$  dan  $v$  dinotasikan  $d(u, v)$  di suatu graf terhubung  $G$  adalah panjang lintasan terpendek dari  $u$  ke  $v$  di  $G$ . [2]

Misalkan  $G$  graf terhubung dan himpunan  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$ . Representasi titik  $v \in V(G)$  terhadap  $W$  adalah pasangan terurut  $k$ -tuple  $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$ . Himpunan  $W$  disebut himpunan pembeda dari graf  $G$  jika representasi setiap titik  $v$  di  $G$  terhadap himpunan  $W$  berbeda. Himpunan pembeda dari graf  $G$  yang mempunyai kardinalitas minimum disebut basis dari graf  $G$  dan kardinalitas basis disebut dimensi metrik dari graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $dim(G)$ . Misalkan  $S \subseteq V(G)$  dan terdapat titik  $v$  pada graf terhubung  $G$ , maka jarak antara  $v$  dan  $S$  dinotasikan  $d(v, S)$ , didefinisikan sebagai  $d(v, S) = \min\{d(v, x) : x \in S\}$ . Jika  $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  adalah  $k$ -partisi dari  $V(G)$ , maka representasi  $v$  terhadap  $\Pi$  adalah  $k$ -tuple  $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$ . Jika  $k$ -tuple  $r(v|\Pi)$  untuk  $v \in V(G)$  semuanya berbeda, maka partisi  $\Pi$  disebut sebagai partisi pembeda. Bilangan  $k$ -minimal yang merupakan  $k$ -partisi pembeda dari  $V(G)$  disebut dimensi partisi dari  $G$  dan dinotasikan dengan  $pd(G)$  [3].

Konsep tentang dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh F. Harary dan R. Melter pada tahun 1976. Kemudian pada tahun 2000, Chartrand dan kkmengembangkan dengan baik tentang konsep dimensi metrik yaitu dimensi partisi yang diterbitkan dalam jurnal berjudul *The Partition Dimension of A Graph*.

Pengembangandimensimetrikdandimensipartisi graf salah satunya dapat diterapkan dalam operasi hasil kali Cartesian. Pada penelitian ini, ditentukan dimensi simetrik dan dimensi partisi dari graf buku bertumpuk  $B_{3,n}$  yang merupakan hasil kali Cartesian antara graf bintang  $K_{1,3}$  dan graf lintasan  $P_n$ .

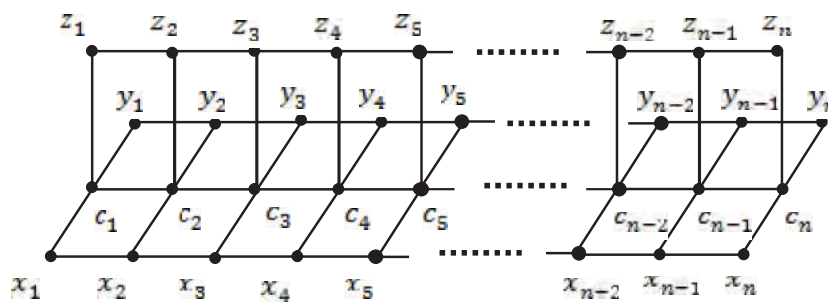
### 15. Pembahasan

Dalam teori graf terdapat beberapa operasi graf untuk membentuk graf yang baru, salah satunya adalah operasi hasil kali Cartesian.

**Definisi 2.1.** Misalkan  $G_1$  dan  $G_2$  adalah dua buah graf. Hasil kali Cartesian  $G_1 \times G_2$  adalah graf yang memuat himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$ . Dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  terhubung langsung di  $G_1 \times G_2$  jika dan hanya jika memenuhi syarat sebagai berikut:

1.  $u_1 = v_1$  dan  $u_2 v_2 \in E(G_2)$ , atau
2.  $u_2 = v_2$  dan  $u_1 v_1 \in E(G_1)$  [2]

**Definisi 2.2.** Graf buku bertumpuk dinotasikan dengan  $B_{m,n}$  adalah graf yang diperoleh dari hasil kali Cartesian  $K_{1,m} \times P_n$ . [5]



Graf buku bertumpuk  $B_{3,n}$  mempunyai himpunan titik  $V(B_{3,n}) = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{y_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{z_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{c_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  dan himpunan sisi

$$E(B_{3,n}) = \{x_i x_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{y_i y_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{z_i z_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{c_i c_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{x_i c_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{y_i c_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{z_i c_i | i = 1, 2, \dots, n\}$$

dengan order dari graf buku bertumpuk  $B_{3,n}$  adalah  $4n$  dan ukurannya adalah  $7n - 4$ .

**Lemma 1.** Misalkan  $G$  graf terhubung dengan  $U' \subseteq U \subseteq V(G)$ . Jika  $U'$  adalah himpunan pembeda maka  $U$  juga merupakan himpunan pembeda. [4]

**Lemma 2.**  $\dim(K_{1,n}) = n - 1$  ( $n \geq 2$ ). [6]

**Lemma 3.** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dengan order  $n$ . Graf  $G$  mempunyai dimensi metrik 1 jika dan hanya jika graf  $G$  adalah  $P_n$ . [1]

**Lemma 4.** Misalkan  $\Pi$  adalah partisi pembeda dari  $V(G)$  dan  $u, v \in V(G)$ . Jika

$$d(u, w) = d(v, w), \text{ untuk semua } w \in V(G) - \{u, v\} \text{ maka } u \text{ dan } v \text{ harus}$$

berada di kelas partisi yang berbeda. [3]

**Lemma 5.** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dengan order  $n \geq 2$ . Maka  $pd(G) = 2$  jika

dan hanya jika  $G = P_n$ . [3]

**Lemma 6.** Jika  $G$  adalah graf terhubung tak trivial, maka  $pd(G) \leq \dim(G) + 1$  [3]

**Lemma 7.** Untuk sebarang graf terhubung  $G_1$  dan  $G_2$ ,

$$pd(G_1 \times G_2) \leq pd(G_1) + \dim(G_2) \text{ [6]}$$

**Akibat 8.** Untuk sebarang graf terhubung  $G_1$  dan  $G_2$ ,

$$pd(G_1 \times G_2) \leq \dim(G_1) + \dim(G_2) + 1 \text{ [6]}$$

Berikut ini adalah hasil dari  $\dim(B_{3,n})$  untuk  $n \geq 3$  yang disajikan dalam bentuk observasi, lemma, dan teorema.

**Observasi 2.1.**  $d(x_i, c_i) = d(y_i, c_i) = d(z_i, c_i) = 1$ .

**Observasi 2.2.**  $d(x_i, y_i) = d(x_i, z_i) = d(y_i, z_i) = 2$ .

**Observasi 2.3.**  $d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j) = d(z_i, z_j) = d(c_i, c_j) = |j - i|$ .

**Observasi 2.4.** Untuk  $i \neq j$ ,  $d(c_i, x_j) = d(c_i, y_j) = d(c_i, z_j) = |j - i| + 1$ .

**Observasi 2.5.** Untuk  $i \neq j$ ,  $d(x_i, y_j) = d(x_i, z_j) = d(y_i, z_j) = |j - i| + 2$ .

**Lemma 2.6.** Misalkan  $W \subseteq V(B_{3,n})$  untuk  $n \geq 3$ . Jika  $|W| = 2$  maka  $W$  bukan merupakan himpunan pembeda.

**Bukti:** Misalkan  $W \subseteq V(B_{3,n})$  untuk  $n \geq 3$  dan  $|W| = 2$ , maka terdapat 2 kasus.

- ❖ Kasus 1: Jika dipilih titik-titik di  $W$  berindeks sama.
  - a. Untuk  $W$  yang tidak memuat titik pusat. Diambil sebarang  $W = \{x_i, y_i\}$ ,  $W = \{x_i, z_i\}$ , atau  $W = \{y_i, z_i\}$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ . Berdasarkan Observasi 2.2 dan Observasi 2.4 maka untuk  $W = \{x_i, y_i\}$  berlaku  $r(z_i|W) = r(c_{i+1}|W) = (2, 2)$  atau  $r(z_i|W) = r(c_{i-1}|W) = (2, 2)$ . Untuk  $W = \{x_i, z_i\}$  berlaku  $r(y_i|W) = r(c_{i+1}|W) = (2, 2)$  atau  $r(y_i|W) = r(c_{i-1}|W) = (2, 2)$ . Untuk  $W = \{y_i, z_i\}$  berlaku  $r(x_i|W) = r(c_{i+1}|W) = (2, 2)$  atau  $r(x_i|W) = r(c_{i-1}|W) = (2, 2)$ .
  - b. Untuk  $W$  yang memuat titik pusat. Diambil sebarang  $W = \{x_i, c_i\}$ ,  $W = \{y_i, c_i\}$ , atau  $W = \{z_i, c_i\}$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ . Berdasarkan Observasi 2.1 dan Observasi 2.2 maka untuk  $W = \{x_i, c_i\}$  berlaku  $r(z_i|W) = r(y_i|W) = (2, 1)$ . Untuk  $W = \{y_i, c_i\}$  berlaku  $r(x_i|W) = r(z_i|W) = (2, 1)$ . Untuk  $W = \{z_i, c_i\}$  berlaku  $r(x_i|W) = r(y_i|W) = (2, 1)$ .
- ❖ Kasus 2: Jika dipilih titik-titik di  $W$  indeksnya berbeda.
  - a. Jika  $W$  hanya memuat 1 titik sejenis.

- Untuk  $W$  yang tidak memuat titik pusat. Diambil sebarang  $W = \{x_i, x_j\}$ ,  $W = \{y_i, y_j\}$ , atau  $W = \{z_i, z_j\}$  dengan  $i \neq j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ . Berdasarkan Observasi 2.3 dan Observasi 2.5 maka untuk  $W = \{x_i, x_j\}$  berlaku  $r(y_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j - i| + 2)$ . Untuk  $W = \{y_i, y_j\}$  berlaku  $r(x_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j - i| + 2)$  dan untuk  $W = \{z_i, z_j\}$  berlaku  $r(x_i|W) = r(y_i|W) = (2, |j - i| + 2)$ .
- Untuk  $W$  yang memuat titik pusat. Diambil sebarang  $W = \{c_i, c_j\}$  dengan  $i \neq j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ . Berdasarkan Observasi 2.1 dan Observasi 2.4 maka berlaku  $r(x_i|W) = r(y_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j - i| + 1)$ .

b. Jikadipilih  $W$  yang memuat 2 titik sejenis.

- Untuk  $W$  yang tidak memuat titik pusat. Diambil sebarang  $W = \{x_i, y_j\}$ ,  $W = \{x_i, z_j\}$ , atau  $W = \{y_i, z_j\}$  dengan  $i \neq j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ . Berdasarkan Observasi 2.3, Observasi 2.4, dan Observasi 2.5 maka untuk  $W = \{x_i, y_j\}$  berlaku  $r(x_{i+1}|W) = r(c_i|W)$ ,  $r(y_{i-1}|W) = r(c_j|W)$  atau  $r(x_{i-1}|W) = r(c_i|W)$ ,  $r(y_{i+1}|W) = r(c_j|W)$ . Untuk  $W = \{x_i, z_j\}$  berlaku  $r(x_{i+1}|W) = r(c_i|W)$ ,  $r(z_{i-1}|W) = r(c_j|W)$  atau  $r(x_{i-1}|W) = r(c_i|W)$ ,  $r(z_{i+1}|W) = r(c_j|W)$ . Untuk  $W = \{y_i, z_j\}$  berlaku  $r(y_{i+1}|W) = r(c_i|W)$ ,  $r(z_{i-1}|W) = r(c_j|W)$  atau  $r(y_{i-1}|W) = r(c_i|W)$ ,  $r(z_{i+1}|W) = r(c_j|W)$ .
- Untuk  $W$  yang memuat titik pusat. Diambil sebarang  $W = \{x_i, c_j\}$ ,  $W = \{y_i, c_j\}$ , atau  $W = \{z_i, c_j\}$  dengan  $i \neq j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ . Berdasarkan Observasi 2.2 dan Observasi 2.4 maka untuk  $W = \{x_i, c_j\}$  berlaku  $r(y_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j - i| + 1)$ . Untuk  $W = \{y_i, c_j\}$  berlaku  $r(x_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j - i| + 1)$  dan untuk  $W = \{z_i, c_j\}$  berlaku  $r(x_i|W) = r(y_i|W) = (2, |j - i| + 1)$ .

Jaditerbuktibahwa untuk  $|W| = 2$  maka  $W$  bukan merupakan himpunan pembeda. ■

**Teorema 2.7.** Untuk  $n \geq 3$ ,  $\dim(B_{3,n}) = 3$ .

**Bukti:** Dipilih  $W = \{x_1, y_1, z_1\} \subseteq B_{3,n}$ .

Berdasarkan Observasi 2.3

$$d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j) = d(z_i, z_j) = |j - i|.$$

Berdasarkan Observasi 2.4

$$d(c_i, x_j) = d(c_i, y_j) = d(c_i, z_j) = |j - i| + 1.$$

Berdasarkan Observasi 2.5

$$d(x_i, y_j) = d(x_i, z_j) = d(y_i, z_j) = |j - i| + 2. \text{ Sehingga representasi setiap titik}$$

terhadap  $W$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$r(x_i | W) = (i - 1, i + 1, i + 1)$$

$$r(y_i | W) = (i + 1, i - 1, i + 1)$$

$$r(z_i | W) = (i + 1, i + 1, i - 1)$$

$$r(c_i | W) = (i, i, i)$$

Jelas bahwa  $d(x_i, x_1) \neq d(y_i, x_1) \neq d(c_i, x_1)$  sehingga  $r(x_i | W) \neq r(y_i | W) \neq r(c_i | W)$ . Sedangkan  $d(y_i, x_1) = d(z_i, x_1)$ , namun karena  $d(y_i, y_1) \neq d(z_i, y_1)$  sehingga  $r(y_i | W) \neq r(z_i | W)$ . Karena semua representasi titik berbeda maka  $W$  adalah himpunan pembeda. Lemma 2.6 menyatakan bahwa untuk setiap  $W$  dengan kardinalitas 2 bukan merupakan himpunan pembeda. Sehingga  $W$  merupakan basis dari  $B_{3,n}$ . Jadi terbukti bahwa  $\dim(B_{3,n}) = 3$ . ■

Setelah menentukan dimensi metrik graf kubertumpuk  $\dim(B_{3,n})$ , selanjutnya akan ditentukan dimensi partisi graf kubertumpuk  $pd(B_{3,n})$  untuk  $n \geq 3$  yang disajikan dalam bentuk observasi, lemma, dan teorema sebagai berikut.

**Observasi 2.8.** Misalkan  $a_i \in V(B_{3,n})$ . Jika  $S$  memuat  $a_i$  maka  $d(a_i, S) = 0$ .

**Observasi 2.9.** Jika  $S = \{x_1\}$  maka  $d(x_i, S) = i - 1$ ,  $d(y_i, S) = d(z_i, S) = i + 1$ , dan  $d(c_i, S) = i$ .

**Observasi 2.10.** Jika  $S = \{x_n, y_n, c_n\}$  maka:

$$d(x_i, S) = \min\{n - i, n - i + 2, n - i + 1\} = n - i.$$

$$d(y_i, S) = \min\{n - i + 1, n - i, n - i + 1\} = n - i.$$

$$d(z_i, S) = \min\{n - i + 2, n - i + 2, n - i + 1\} = n - i + 1.$$

$$d(c_i, S) = \min\{n - i + 1, n - i + 1, n - i\} = n - i.$$



**Observasi 2.11.** Jika  $S$  memuat  $x_{n-1}$  maka  $d(x_n, S) = 1$ .

**Observasi 2.12.** Jika  $S$  memuat  $y_{n-1}$  maka  $d(y_n, S) = 1$ .

**Observasi 2.13.** Jika  $S$  memuat  $c_{n-1}$  maka  $d(c_n, S) = 1$ .

**Teorema 2.10.** Untuk  $n \geq 3$ ,  $pd(B_{3,n}) = 3$ .

**Bukti:** Dipilih  $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$  dengan  $S_1 = \{x_1\}$ ,  $S_2 = \{x_n, y_n, c_n\}$  dan  $S_3 = \{x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, z_1, z_2, \dots, z_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\}$ . Berdasarkan Observasi 2.9 maka  $d(x_i, S_1) = i - 1$ ,  $d(y_i, S_1) = d(z_i, S_1) = i + 1$ , dan  $d(c_i, S_1) = i$ .

Berdasarkan Observasi

2.10 maka  $d(x_i, S_2) = d(y_i, S_2) = d(c_i, S_2) = n - i$ ,  $d(z_i, S_2) = n - i + 1$ , dan

$d(x_i, S_3) = 0$  atau  $d(x_i, S_3) = 1$ ,  $d(y_i, S_3) = 0$  atau  $d(y_i, S_3) = 1$ ,  $d(c_i, S_3) = 0$  atau  $d(c_i, S_3) = 1$ . Berdasarkan Observasi 2.8, Observasi 2.11, Observasi 2.12, dan Observasi 2.13  $d(z_i, S_3) = 0$ . Sehingga representasi setiap titik pada graf buku

bertumpuk  $B_{3,n}$  terhadap  $\Pi$  adalah sebagai berikut:

$$r(x_i | \Pi) = \begin{cases} (i - 1, n - i, 0), & \text{untuk } 1 < i < n \\ (i - 1, n - i, 1), & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

$$r(y_i | \Pi) = \begin{cases} (i + 1, n - i, 0), & \text{untuk } 1 \leq i < n \\ (i + 1, n - i, 1), & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

$$r(z_i | \Pi) = (i + 1, n - i + 1, 0)$$

$$r(c_i | \Pi) = \begin{cases} (i, n - i, 0), & \text{untuk } 1 \leq i < n \\ (i, n - i, 1), & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

Jelas bahwa  $d(x_i, S_1) \neq d(z_i, S_1) \neq d(c_i, S_1)$  sehingga  $r(x_i | \Pi) \neq r(y_i | \Pi) \neq r(c_i | \Pi)$ .

Sedangkan  $d(y_i, S_1) = d(z_i, S_1)$ , namun karena  $d(y_i, S_2) \neq d(z_i, S_2)$  sehingga

$r(y_i|\Pi) \neq r(z_i|\Pi)$ . Karena semua representasi titik di graf buku bertumpuk  $B_{3,n}$  terhadap  $\Pi$  berbeda, maka  $\Pi$  adalah partisi pembeda. Berdasarkan Lemma 5 dapat dipastikan bahwa  $pd(B_{3,n}) \neq 2$  dikarenakan graf  $B_{3,n}$  bukan merupakan graf lintasan  $P_n$ . Oleh karena itu  $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$  merupakan partisi pembeda minimum dari graf buku bertumpuk  $B_{3,n}$ . Jadi terbukti bahwa  $pd(B_{3,n}) = 3$ . ■

## 16. Kesimpulan

1. Dimensi metrik dari graf buku bertumpuk  $B_{3,n}$  adalah 3.
2. Dimensi partisi graf buku bertumpuk  $B_{3,n}$  adalah 3 dengan partisi pembeda yang tidak tunggal tetapi salah satu partisi adalah partisi pembeda yang memuaskan.

## 17. Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A., dan Oellermann, O.R., *Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of A Graph*, Discrete Appl. Math., 105: 99 – 113, 2000.
- [2] Chartrand, G. dan Lesniak, L., *Graphs and Digraph Third Edition*, Chapman & Hall/CRC. Florida. 1-20, 2000.
- [3] Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P., The Partition Dimension of A Graph, *Aequationes Math*, 59:45-54, 2000.
- [4] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., dan Simanjutak, R., *The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles*, An International Journal of Discrete and Combinatorial Mathematics. Utilitas Mathematica, 83.3, 2010.
- [5] Khalil, Ayhan A. dan Khalil, Omar A., *Determination and Testing the Domination Numbers of Tadpole Graph, Book Graph and Staced Book Graph Using Matlab*, College of Basic Education Researchers Journal, Vol 10, No. 1.494, 2010.

- [6] Yero, Ismail G. dan Rodriguez-Velaguez, Juan A., *A note on the partition dimension of Cartesian product graphs*, Applied Mathematics and Computation, 217:3571-3574, 2010.