

Hazrul Iswadi, Endah Asmawati  
Joice Ruth Juliana, Fitri Dwi Kartikasari  
Joko Siswanto, Arif Herlambang

---

# KALKULUS

Edisi Revisi



# **KALKULUS**

**Edisi revisi**

Penulis :

**Hazrul Iswadi**

**Endah Asmawati**

**Joice Ruth Juliana**

**Fitri Dwi Kartikasari**

**Joko Siswantoro**

**Arif Herlambang**



# KALKULUS

Edisi Revisi

Penulis

**Hazrul Iswadi**

**Endah Asmawati**

**Joice Ruth Juliana**

**Fitri Dwi Kartikasari**

**Joko Siswantoro**

**Arif Herlambang**

Desain Cover & Penata Isi

**Tim MNC Publishing**

Cetakan I, Agustus 2017

Diterbitkan oleh



**Media Nusa Creative**

Anggota IKAPI (162/JTI/2015)

Bukit Cemara Tidar H5 No. 34, Malang

Telp. : 0341 - 563 149 / 08223 2121 888

E-mail : [mnc.publishing.malang@gmail.com](mailto:mnc.publishing.malang@gmail.com)

Website : [www.mncpublishing.com](http://www.mncpublishing.com)

**ISBN : 978-602-6743-20-6**

Hak Cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ke dalam bentuk apapun, secara elektronik maupun mekanis, termasuk fotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya, tanpa izin tertulis dari Penerbit. Undang-Undang Nomor 19 Tahun 2000 tentang Hak Cipta, Bab XII Ketentuan Pidana, Pasal 72, Ayat (1), (2), dan (6)

# Kata Pengantar

---

Kalkulus adalah salah satu cabang dari Matematika yang sangat banyak digunakan oleh ilmu-ilmu teknik dalam menyelesaikan masalah keteknikan. Sudah menjadi konvensi bagi jurusan-jurusan di fakultas teknik di seluruh dunia untuk memberikan mata kuliah matematika di semester-semester awal, biasanya semester satu atau dua. Pengetahuan dan analisa yang dipelajari mahasiswa teknik dari kalkulus sangat berguna untuk pengetahuan dan analisa mereka pada mata kuliah matematika atau teknik yang mereka dapatkan pada semester selanjutnya.

Mengingat kedudukan kalkulus yang sangat penting dalam menunjang pengetahuan dan analisa bagi mahasiswa teknik seperti di atas maka kami merasa sangat penting keberadaan buku kalkulus yang menunjang mahasiswa teknik untuk memahami dan mampu mengaplikasikan kalkulus untuk menyelesaikan persoalan teknik.

Dalam buku ini kami sangat memperhatikan kebutuhan mahasiswa untuk dapat memahami sekaligus mampu mengaplikasikan kalkulus untuk menyelesaikan persoalan teknik. Pemaparan definisi, teorema, atau sifat dalam buku ini diusahakan singkat dan jelas sehingga mahasiswa bisa langsung

mengerti apa yang menjadi inti utama setiap definisi, teorema, atau sifat yang ditulis dalam buku ini. Soal-soal yang ditulis dalam buku ini merupakan modifikasi soal-soal dari buku-buku Kalkulus yang dapat dirujuk pada daftar pustaka buku ini. Tidak hanya sekedar modifikasi soal-soal dari buku yang telah ada, beberapa soal yang kami sertakan dalam buku ini merupakan soal-soal ujian atau kuis yang sudah diberikan di mata kuliah Kalkulus untuk prodi Teknik Industri dan kalkulus I untuk prodi Teknik Kimia, Teknik Elektro, dan Teknik Manufaktur di Fakultas Teknik Universitas Surabaya. Soal latihan yang diberikan dalam buku ini memiliki beragam variasi tingkat kesulitan dan hampir semua soal tersebut disertai kunci soal yang dapat dilihat pada bagian akhir buku ini.

Dari sekitar tujuh bab yang ada dalam buku ini yaitu: sistim bilangan dan pertidaksamaan, fungsi, limit dan kekontinuan, turunan, aplikasi turunan, integral, dan aplikasi integral, terlihat bahwa fungsi, aplikasi turunan dan integral cukup banyak memakan tempat dalam buku ini, hal ini agar mahasiswa mampu memahami dasar kalkulus dengan baik (tercermin dari bab fungsi) sekaligus mampu mengaplikasikan kalkulus dalam masalah teknik (tercermin dari bab tentang aplikasi turunan dan integral).

Semoga buku ini bisa memberi dasar-dasar pengertian kalkulus bagi mahasiswa teknik. Sehingga mahasiswa mampu mengaplikasikan kalkulus dalam masalah keteknikan.

Tim Pengajar Matematika  
Universitas Surabaya

Tim Pengajar Matematika Ubaya

# Daftar Isi

---

Kata Pengantar .....	iii
Daftar Isi .....	v
<b>Bab I Sistem Bilangan dan Pertidaksamaan Pohon</b>	
<b>bilangan .....</b>	<b>1</b>
1.1 Pohon Bilangan .....	2
1.2 Sistem Bilangan .....	4
1.3 Pertidaksamaan .....	20
1.4 Soal latihan .....	24
<b>Bab II Fungsi .....</b>	<b>31</b>
2.1 Apa fungsi itu? .....	32
2.2 Gambar grafik fungsi .....	37
2.3 Sifat-sifat fungsi .....	38
2.4 Macam-macam fungsi .....	39
2.5 Komposisi dan invers fungsi .....	61
2.6 Menggambar fungsi .....	74
2.7 Soal latihan .....	83
<b>Bab III Limit .....</b>	<b>89</b>
3.1 Definisi limit .....	90
3.2 Sifat-sifat limit .....	91
3.3 Limit sepihak .....	93
3.4 Limit yang melibatkan nilai tak hingga .....	96
3.5 Limit fungsi trigonometri .....	104
3.6 Penyelesaian limit bentuk tak tentu .....	107
3.7 Kontinuitas .....	114
3.8 Soal latihan .....	120

<b>Bab IV Turunan Fungsi .....</b>	<b>125</b>
4.1 Definisi turunan .....	125
4.2 Aturan rantai.....	135
4.3 Turunan fungsi implisit .....	138
4.4 Turunan tingkat tinggi.....	141
4.5 Soal latihan .....	144
<b>Bab V Aplikasi Turunan .....</b>	<b>147</b>
5.1 Gradien garis singgung dan garis normal .....	148
5.2 Teorema L'Hopital.....	151
5.3 Laju perubahan yang berkaitan .....	154
5.4 Maksimum dan minimum fungsi .....	157
5.5 Menggambar grafik .....	161
5.6 Soal latihan.....	165
<b>Bab VI Integral .....</b>	<b>173</b>
6.1 Integral sebagai anti turunan .....	173
6.2 Teknik Integrasi .....	180
6.3 Integral tentu.....	210
6.4 Integral tak wajar .....	218
6.5 Soal latihan.....	222
<b>Bab VII Aplikasi Integral .....</b>	<b>229</b>
7.1 Luas bidang datar .....	229
7.2 Volume benda putar .....	233
7.3 Menghitung volume dengan metode penampang melintang .....	244
7.4 Panjang kurva .....	246
7.5 Luas permukaan benda putar .....	250
7.6 Pusat massa .....	254
7.7 Soal latihan .....	262
<b>Kunci Soal Terpilih .....</b>	<b>269</b>
<b>Daftar Rujukan .....</b>	<b>295</b>
<b>Daftar Indeks .....</b>	<b>297</b>
<b>Biografi Para Penulis .....</b>	<b>301</b>



# BAB I

## Sistem Bilangan dan Pertidaksamaan

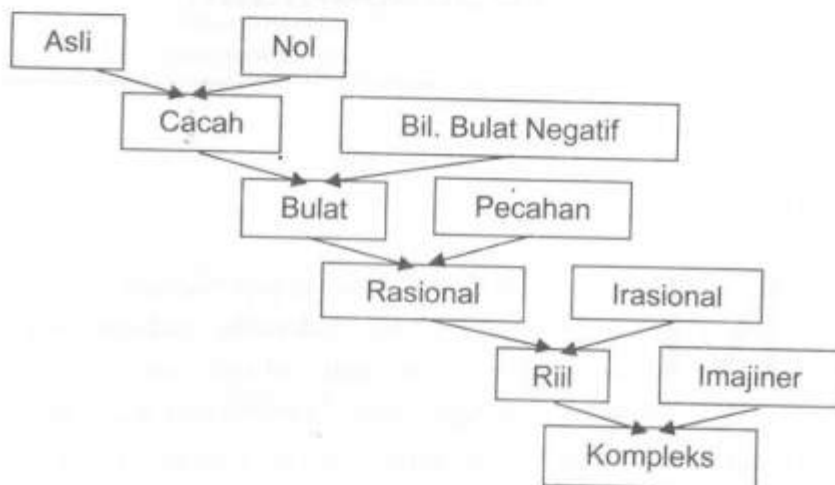
---

### Pendahuluan

**M**atematika berkaitan erat dengan bilangan. Bahkan kamus besar bahasa Indonesia mendefinisikan matematika antara lain sebagai ilmu tentang bilangan-bilangan. Sehingga untuk mempelajari matematika terlebih dahulu harus mengerti sifat-sifat bilangan. Demikian juga halnya dengan kalkulus yang merupakan bagian dari matematika. Fungsi yang dipelajari dalam kalkulus sebagian besar mempunyai daerah definisi bilangan riil. Untuk itu, buku ini kita awali dengan pembahasan tentang sifat-sifat bilangan riil. Kemudian secara singkat juga akan diperkenalkan definisi bilangan kompleks dan pertidaksamaan.

## 1.1 Pohon Bilangan

Bilangan atau himpunan bilangan yang kita kenal sekarang merupakan gabungan pengetahuan dari banyak orang dan terakumulasi dalam jangka waktu yang sangat panjang. Jenis-jenis bilangan yang telah kita kenal dari bilangan asli sampai dengan bilangan kompleks dapat dibuat dalam bentuk pohon bilangan seperti pada gambar 1.1 :



Gambar 1.1 Pohon Bilangan

Penjelasan masing-masing jenis bilangan dan contohnya adalah

1. Bilangan asli (natural numbers) 1, 2, 3, 4, .... Jenis bilangan inilah yang pertama kali digunakan manusia purba untuk menghitung jumlah ternak dan kepunyaannya yang lain. Bilangan ini juga sering disebut dengan *bilangan bulat positif*.

## Daftar Rujukan

---

1. Leithold, L., *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*, terjemahan, jilid 1, edisi 5, Penerbit Erlangga, 1991
2. Finney, T., *Kalkulus dan Geometri Analitik*, terjemahan, jilid 1, edisi 6, Penerbit Erlangga, 1993
3. Ayres Jr, F., dan Elliot M., *Schaum Outline of Problem of Differential and Integral Calculus*, 3<sup>rd</sup> edition, Mc Graw-Hill., 1992
4. Varberg, D., dan Purcell, E. J., *Kalkulus*, terjemahan, jilid 1, edisi 7, Penerbit Interaksa, 2001
5. Martono, K., *Kalkulus 1*, jilid 1 sampai 7, diktat, ITB
6. Hughes-Hallett D., Gleason A. M., et. al., *Calculus : Single Variabel*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, Inc., 1998
7. Stewart, J., *Kalkulus*, terjemahan, jilid 1 dan 2, edisi 4, Penerbit Erlangga, 2001

## Biodata Para Penulis

---



**Hazrul Iswadi** dilahirkan di Sawahlunto (Sumatera Barat) pada tanggal 27 Desember 1973 dan menyelesaikan strata 1 sampai dengan strata 3 di prodi Matematika Institut Teknologi Bandung pada tahun 2011. Bidang kajian penelitian yang digeluti adalah Teori

Graf dan Aplikasinya. Beliau telah menulis lima artikel pada jurnal internasional dan beberapa artikel di jurnal dan prosiding nasional. Bergabung dengan Program Studi Teknik Industri Universitas Surabaya sejak tahun 2011 pada laboratorium Sustainable Supply Chain Engineering. Pada saat ini penelitian beliau berkaitan dengan Teori Graf, Optimisasi, dan Pemodelan. Kemudian sejak tahun 2017 bergabung dengan Program Magister Teknik Industri Universitas Surabaya. Mata kuliah yang diajar untuk program Sarjana dan Magister Teknik Industri antara lain Kalkulus, Penyelidikan Operasional, Aljabar Linier, Persamaan Diferensial Biasa, Pemodelan Sistem, dan Pemodelan dan Simulasi.



**Endah Asmawati**, lahir di Surabaya tanggal 14 Mei 1976, menyelesaikan studi S1 matematika di Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember pada tahun 1999, kemudian bergabung sebagai staf pengajar di Departemen Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Surabaya sampai saat ini. Mata kuliah-mata kuliah yang pernah di asuh adalah Kalkulus I, Kalkulus II, Persamaan Diferensial, Metode Numerik, Pengantar Aljabar Linier pada Fakultas Teknik, dan mata kuliah Matematika Dasar pada Fakultas Farmasi Universitas Surabaya. Selain mengasuh matakuliah, juga aktif mengikuti beberapa seminar dan workshop baik sebagai pemakalah ataupun peserta.



**Joice Ruth Juliana**, lahir di Surabaya tanggal 25 Juli 1975, menyelesaikan studi S1 matematika di Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember pada tahun 1997, kemudian bergabung sebagai staf pengajar di Departemen Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Surabaya sampai saat ini. Mata kuliah-mata kuliah yang pernah di asuh adalah Kalkulus I, Kalkulus II, Vektor dan Matriks, Persamaan Diferensial, Metode Numerik, Matematika Teknik pada Fakultas Teknik, dan mata kuliah Matematika Dasar pada Fakultas Farmasi Universitas Surabaya. Selain mengasuh matakuliah, juga aktif mengikuti beberapa seminar dan workshop baik sebagai pemakalah ataupun peserta.



**Fitri Dwi Kartikasari**, lahir di Surabaya tanggal 21 Oktober 1974, menyelesaikan studi S1 matematika di Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember pada tahun 1997, kemudian bergabung sebagai staf pengajar di Departemen Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Surabaya sampai saat ini. Mata kuliah-

mata kuliah yang pernah di asuh adalah Kalkulus I, Kalkulus II, Vektor dan Matriks, Persamaan Diferensial, Metode Numerik pada Fakultas Teknik, dan mata kuliah Matematika Dasar pada Fakultas Farmasi Universitas Surabaya. Selain mengasuh matakuliah, juga aktif mengikuti beberapa seminar dan workshop baik sebagai pemakalah ataupun peserta.



**Joko Siswantoro**, lahir di Lamongan pada tanggal 9 Desember 1974. Setelah menamatkan studi S1 dalam bidang Matematika dari Jurusan Matematika Universitas Airlangga pada tahun 1997, beliau bekerja sebagai staf pengajar pada Departemen Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Surabaya sampai dengan tahun 2015. Mata kuliah

matematika yang pernah di asuh adalah mata kuliah dasar matematika pada Fakultas Teknik, Fakultas Farmasi, dan Fakultas Bisnis dan Ekonomika Universitas Surabaya, antara lain: Kalkulus, Aljabar Linier, Metode Numerik, Persamaan Diferensial, Matematika Farmasi, dan Matematika Ekonomi.

Pada tahun 2000 beliau berkesempatan untuk melanjutkan studi S2 bidang Matematika Terapan di Departemen Matematika Institut Teknologi Bandung, dan selesai pada tahun 2002. Pada tahun 2011 sampai 2016 beliau melanjutkan studi S3 dalam bidang Ilmu Komputer di *Faculty of Information Science and Technology* Universiti Kebangsaan Malaysia, dengan topik riset dalam bidang *computer vision*. Saat ini beliau adalah staf pengajar dan kepala laboratorium *Intelligent System* Jurusan Teknik Informatika Universitas Surabaya.



**Arif Herlambang**, lahir di Surabaya tanggal 6 Februari 1977, menyelesaikan studi S1 matematika di Jurusan Matematika Universitas Airlangga pada tahun 2001. Dari tahun 2001 sampai 2003 menjadi dosen LB (luar biasa) di Fakultas Teknik (FT) Universitas Surabaya (Ubaya). Mulai dari tahun 2003 menjadi dosen tetap di FT Ubaya. Mata kuliah yang pernah di asuh adalah Kalkulus I, Kalkulus II pada FT Ubaya, dan mata kuliah Matematika Dasar pada Fakultas Farmasi Ubaya. Minat keilmuan pada saat sekarang adalah Metode Numerik.

# KALKULUS

Edisi Revisi

**C**alculus atau yang diterjemahkan sebagai kalkulus mempunyai kata dasar calculate atau menghitung. Kalkulus sering kali diasumsikan sebagai analisis matematika dasar (elementary mathematical analysis) yang meneliti tentang gerakan dan laju perubahan. Sedangkan, analisis matematika merupakan salah satu cabang yang besar dari matematika sehingga penguasaan yang baik mengenai kalkulus berpengaruh besar terhadap penguasaan matematika secara umum.

Di pihak lain, banyak masalah dalam persoalan teknik atau kehidupan sehari-hari, seperti gerakan (kecepatan, percepatan, atau gaya), masalah maksimum minimum, atau garis singgung yang dapat dianalisis dengan menggunakan konsep-konsep dalam kalkulus. Dalam sejarah perkembangan kalkulus, konsep-konsep kalkulus saling berinteraksi dengan masalah-masalah teknis dan kehidupan sehari-hari. Hal itu membuat konsep-konsep kalkulus menjadi semakin kaya dan semakin berguna dalam menyelesaikan persoalan, baik secara teknik maupun dalam kehidupan sehari-hari.

Pengalaman para penulis yang banyak berkecimpung di fakultas teknik membuat materi dan soal yang disajikan dalam buku ini langsung pada keperluan untuk menyelesaikan masalah teknik. Secara umum, buku ini cocok sekali untuk para pembaca yang ingin mengerti kalkulus dan mengaplikasikannya dalam menyelesaikan soal-soal dengan penjelasan yang sederhana.



**Media Nusa Creative**

Anggota IKAPI (162/JTI/2015)

Bukit Cemara Tidar H5 No. 34 - Malang

Telp : 0341 - 563 149 / 08223 2121 888

Email : [mnc.publishing.malang@gmail.com](mailto:mnc.publishing.malang@gmail.com)

Website : [www.mncpublishing.com](http://www.mncpublishing.com)



9 786026 743206