

PERULANGAN PADA DIGRAF HAMPIR MOORE

Hazrul Iswadi

Departemen MIPA Universitas Surabaya

Abstrak

Digraf Moore adalah graf berarah (*directed graph*) atau digraf yang memiliki derajat d , diameter k , dan jumlah titik sebanyak $n = 1 + d + d^2 + \dots + d^k$ atau disebut sebagai jumlah Moore. Telah diketahui di (Plesnik & Znam, 1974), dan (Bidges & Toueg, 1980) bahwa digraf Moore hanya ada pada kasus-kasus trivial yaitu untuk $d = 1$ (digraf lingkaran C_{k+1}) dan untuk $k = 1$ (digraf lengkap K_{d+1}). Penelitian baru-baru ini diarahkan pada menentukan keberadaan digraf seperti di atas dengan jumlah titik kurang satu dari jumlah Moore atau disebut digraf hampir Moore dan ditulis sebagai (d,k) -digraf. Digraf yang memiliki jumlah titik seperti di atas mengakibatkan munculnya konsep perulangan dan perulangan-diri. Penelitian Miller & Fris (1992) mendapatkan bahwa $(d,2)$ -digraf selalu ada. Pertanyaan yang sangat penting untuk dijawab adalah berapa banyak $(d,2)$ -digraf yang memiliki struktur berbeda untuk d tertentu? Penulis dan peneliti yang lain menggunakan konsep perulangan dan perulangan-diri seperti di Baskoro, etal (1995), Simanjuntak & Baskoro, (1999), Iswadi & Baskoro, (1999) dan Baskoro, etal (1998) untuk menjawab sebagian pertanyaan di atas. Penelitian kali ini akan mengali lebih dalam sifat-sifat titik perulangan dan perulangan-diri dengan mengembangkan hasil yang telah didapat di Iswadi & Baskoro, (1999).

Key Words: Moore Digraph, Almost Moore Digraph, Repeat, Selfrepeat.

PENDAHULUAN

Graf berarah atau Digraf merupakan salah satu model yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dalam pendisainan suatu jaringan interkoneksi. Dengan menyatakan nodes sebagai titik, links sebagai

busur dan waktu komunikasi antar dua nodes sebarang di jaringan sebagai jarak antara dua titik, kita dapat menyelesaikan masalah pemaksimalan jumlah titik dalam jaringan dengan syarat waktu komunikasi singkat dan jumlah sambungan dari suatu nodes dibatasi dengan mengubah masalahnya menjadi masalah menentukan digraf dengan jumlah titik maksimum dan derajat yang dibatasi tapi memiliki diameter yang sekecil mungkin.

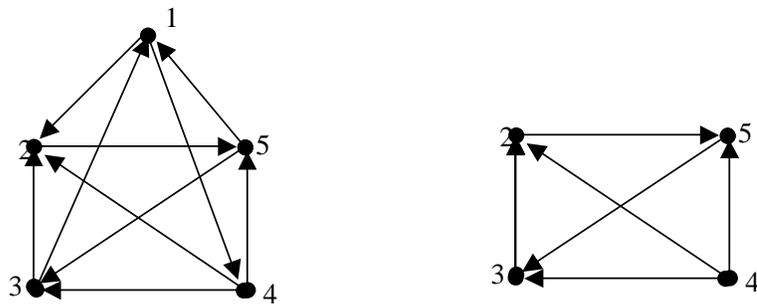
Banyak penelitian telah dilakukan untuk menunjukkan ada atau tidaknya (masalah keujudan) dan memastikan ada berapa banyak struktur yang berbeda (masalah enumerasi) dari digraf yang seperti di atas; dalam kaitan dengan masalah enumerasi dibutuhkan konsep perulangan.

Artikel ini akan dibicarakan terlebih dahulu digraf dan sifatnya secara umum. Kemudian dibahas digraf Moore yaitu digraf dengan jumlah titik persis sama dengan jumlah Moore. Karena digraf Moore telah diketahui semua sifatnya maka perhatian akan ditujukan kepada digraf dengan jumlah titik kurang satu dari jumlah Moore atau digraf hampir Moore. Bagian akhir artikel ini akan membahas perulangan sebagai salah satu alat dalam masalah enumerasi beserta sifat umum dan sifatnya pada digraf hampir Moore yang memiliki derajat 4 dan diameter 2 atau (4,2)-digraf.

DIGRAF

Digraf $G = (V, E)$ adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan berhingga tak kosong V , dengan unsurnya biasa disebut *titik* dan himpunan E pasangan terurut dari titik-titik yang berbeda di V , dengan unsurnya disebut *busur*. Himpunan V , atau seringkali ditulis $V(G)$, biasanya disebut dengan *himpunan titik* dari G dan himpunan E , seringkali ditulis $E(G)$, disebut *himpunan busur* dari G . *Order* dari digraf G adalah kardinalitas dari V .

Digraf $H = (V(H), E(H))$ merupakan *subdigraf* dari digraf $G = (V(G), E(G))$ jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$. Sebagai contoh, dalam gambar 1, digraf G_1 memiliki order 4 dan salah satu subdigrafnya adalah digraf G_2 .

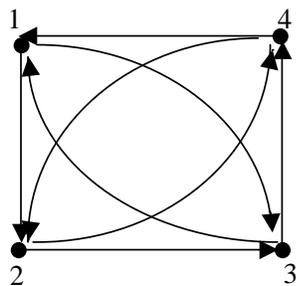


Digraf G_1

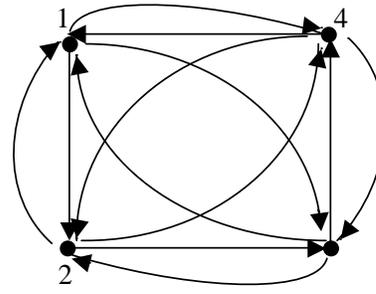
Digraf G_2

Gambar 1. Digraf dan subdigrafnya

Jika (u, v) suatu busur pada digraf G , maka titik u dikatakan *tetangga dalam* dari v , sedangkan v dikatakan *tetangga luar* dari titik u . Selanjutnya kedua titik u dan v dikatakan *bertetangga*. Untuk setiap titik v pada digraf G , $N^+(v)$ menyatakan himpunan semua tetangga luar dari v , sedangkan $N^-(v)$ menyatakan himpunan semua tetangga dalam dari v . *Derajat luar* $d^+(v)$ dari suatu titik v di G adalah kardinalitas dari $N^+(v)$, sedangkan *derajat dalam* $d^-(v)$ titik v adalah kardinalitas dari $N^-(v)$. Digraf G dikatakan *diregular derajat d* jika untuk setiap titik v di G berlaku $d^+(v) = d^-(v) = d$. Digraf dalam gambar 2 adalah digraf diregular dengan derajat 2 dan 3.



Digraf G_1 diregular derajat 2

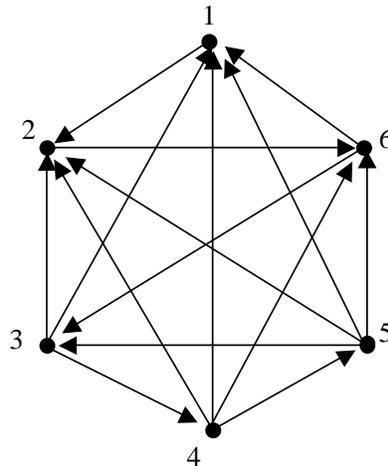


Digraf G_2 diregular derajat 3

Gambar 2. Contoh digraf diregular derajat 2 dan 3

Jalan $W = (u = u_0, u_1, \dots, u_{h-1}, u_h = v)$ dengan panjang h dari titik u ke titik v di G adalah suatu barisan dari titik-titik di G sedemikian sehingga (u_{i-1}, u_i) adalah sebuah busur di digraf G untuk setiap i . Titik u membentuk jalan trivial dari u ke u dengan panjang 0. Jalan dari u ke v dengan panjang h dikatakan mempunyai h langkah. Jalan W di atas dikatakan tertutup jika $u = v$. Jalan W disebut *trail* jika $(u, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{h-1}, v)$ adalah busur-busur yang berbeda di G .

Jalan W disebut *lintasan* (path) jika $u, u_1, \dots, u_{h-1}, v$ adalah titik-titik yang berbeda. Jika terdapat suatu lintasan dari u ke v maka kita katakan v dapat dicapai dari u . Lingkaran C_k dengan panjang k adalah *trail tertutup* dengan k titik. Jarak $d(u, v)$ dari titik u menuju v di G adalah panjang lintasan terpendek dari titik u menuju titik v . Secara umum $d(u, v)$ tidak sama dengan $d(v, u)$. *Diameter* k dari digraf G adalah $\max\{d(u, v) \mid u, v \in G\}$. Digraf dalam Gambar 3 mempunyai diameter 5, karena maksimum jarak antara dua titik pada digraf sama dengan 5.



Gambar 3. Contoh digraf berdiameter 5

DIGRAF HAMPIR MOORE

Jika dimisalkan G adalah digraf diregular dengan derajat d , diameter k dan memiliki n titik. Misalkan x suatu titik di G . Untuk setiap $i = 0, 1, \dots, k$, definisikan n_i sebagai banyaknya titik yang berjarak i dari titik x di G . Maka,

$$n_i \leq d^i, \quad \text{untuk setiap } i = 1, \dots, k.$$

Sehingga

$$n = \sum_{i=0}^k n_i \leq M_{d,k} = 1 + d + d^2 + \dots + d^k.$$

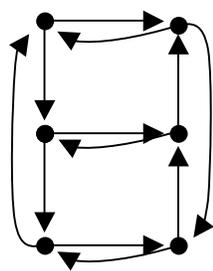
$M_{d,k}$ merupakan batas atas untuk digraf G dan disebut dengan *batas Moore*. Digraf yang memiliki jumlah titik sama dengan batas Moore disebut dengan *digraf Moore*.

Beberapa artikel telah menunjukkan digraf Moore hanya ada untuk digraf lingkaran C_{k+1} atau digraf lengkap K_{d+1} . Kedua digraf tersebut

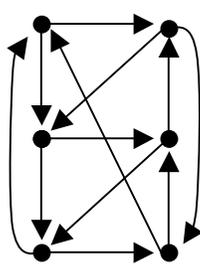
didapatkan dari kasus-kasus trivial yaitu untuk $d = 1$ atau $k = 1$. Sedangkan untuk kasus $d > 1$ dan $k > 1$ diketahui bahwa digraf Moore tidak ada (Plesnik & Znam, 1974; Bidges & Toueg, 1980).

Hasil-hasil di atas mendorong studi lebih lanjut untuk memperoleh keujudan digraf optimal dengan jumlah titik yang kurang satu dari batas Moore, yaitu $n = M_{d,k} - 1$. Untuk berikutnya kita nyatakan digraf yang memiliki jumlah titik $n = M_{d,k} - 1$, derajat d , dan diameter k dengan *digraf hampir Moore* dan dinotasikan dengan (d,k) -digraf.

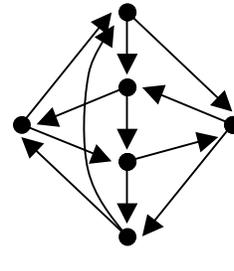
Beberapa hasil telah diperoleh tentang keujudan dan enumerasi (d,k) -digraf. Digraf hampir Moore ada untuk derajat d dan diameter 2 (Miller & Fris, 1992). Kemudian di Miller & Fris (1988) dan Baskoro, et al (1995) didapatkan bahwa untuk $(2,2)$ -digraf terdapat tepat tiga digraf non-isomorfik (lihat gambar 4) dan untuk $(3,2)$ -digraf terdapat tepat satu digraf non-isomorfik, yaitu digraf garis dari digraf lengkap K_4 . Juga telah didapatkan hasil enumerasi untuk $d = 4$ di Simanjuntak & Baskoro, (1999) dan Iswadi & Baskoro, (1999) yaitu $(4,2)$ -digraf terdapat tepat satu digraf non-isomorfik yang didapatkan dari digraf garis dari digraf lengkap K_5 .



(1)(2)(3)(4)(5)(6)



(123)(456)



(1234)(56)

Gambar 4. Tiga (2,2)-digraf non-isomorfik.

Telah diketahui (d,k) -digraf G untuk kasus-kasus trivial adalah digraf lingkaran C_k untuk $d = 1$ dan digraf lengkap K_d untuk $k = 1$. Penelitian-penelitian yang lain dilakukan dengan membuat derajat (d,k) -digraf G tetap. Hasil-hasil yang didapat antara lain di Miller & Fris (1992), bahwa $(2,k)$ -digraf dengan $k \geq 3$ tidak ada. Kemudian $(3,k)$ -digraf dengan $k \geq 3$ juga tidak ada (Baskoro, et al, 1997).

PERULANGAN

Misalkan G suatu (d,k) -digraf. Karena orde G hanya kurang satu dari batas Moore, maka mudah ditunjukkan bahwa proposisi berikut ini berlaku:

Proposisi 1 Untuk setiap dua titik u dan v pada (d,k) -digraf G terdapat paling banyak satu jalan panjang $l < k$ dari u menuju v . Khususnya, G tidak memuat lingkaran panjang l , dimana panjang $l < k$.

Proposisi 2 Untuk setiap titik x pada (d,k) -digraf terdapat tepat satu titik $r(x)$ yang disebut *titik perulangan* dari x atau disebut *perulangan* dari x , sedemikian sehingga terdapat dua jalan yang memiliki panjang $\leq k$ dari x menuju $r(x)$ (salah satunya harus memiliki panjang sama dengan k).

Proposisi 3 Tidak ada titik pada (d,k) -digraf termuat dalam dalam dua lingkaran C_k .

Misalkan x titik di (d,k) -digraf G . Jika $r(x) = x$ maka x disebut *perulangan-diri* di G . Dua jalan yang dimaksud dalam proposisi 2 mempunyai panjang 0 dan k . Mudah untuk dilihat bahwa x perulangan-

diri di G jika dan hanya jika x termuat dalam suatu lingkaran C_k . Jika $r(x) \neq x$ maka x disebut *bukan perulangan-diri* di G .

Beberapa sifat umum dari perulangan dan bukan perulangan-diri dapat kita lihat pada teorema dan lema berikut ini. Misalkan G suatu (d, k) -digraf dan $S \subseteq V$, definisikan $r(S) = \{r(x) \mid x \in S\}$. Teorema 1 dan Lema 1 berikut ini telah dibuktikan di Miller & Fris (1992 & 1988).

Teorema 1 Untuk setiap titik v dari (d, k) -digraf, berlaku:

- a. $N^+(r(v)) = r(N^+(v))$.
- b. $N^-(r(v)) = r(N^-(v))$.

Teorema 1 menunjukkan bahwa $(a, b) \in G$ jika dan hanya jika $(r(a), r(b)) \in G$.

Lema 1 Permutasi r pada $N^+(v)$ mempunyai struktur lingkaran yang sama untuk setiap perulangan-diri v di (d, k) -digraf.

Lema 2 dan 3 berikut ini telah dibuktikan di Iswadi & Baskoro, (1999).

Lema 2 Jika x bukan titik perulangan-diri di $(d, 2)$ -digraf G dan $r(x) \in N^+(x)$ maka $N^+(x)$ tidak memuat sembarang titik perulangan-diri.

Lema 3 Jika x suatu titik bukan perulangan-diri di $(d, 2)$ -digraf G dan $r(x) \in N^+(x)$ maka $N^+(x)$ tidak memuat secara bersama-sama suatu titik dan perulangannya.

Pada Lema 4, 5, 6, dan 7 berikut ini akan kita teliti sifati-sifat tetangga luar sekutu dari dua titik yang bertetangga.

Lema 4 Misalkan x dan y dua titik yang berbeda di $(d, 2)$ -digraf G . Jika titik $(y, x) \in G$ dan x bukan titik perulangan-diri maka $(x, y) \notin G$.

Bukti. Andaikan $(x, y) \in G$. Maka x dan y berada pada suatu lingkaran dengan panjang dua. Sehingga x dan y keduanya titik perulangan-

diri. Bertentangan dengan x bukan titik perulangan-diri.

Lema 5 Misalkan G adalah $(d,2)$ -digraf. Jika $(x,y) \hat{\in} G$ maka paling banyak satu titik tetangga luar dari x , selain y , yang berada di $N^+(y)$.

Bukti. Andaikan dua tetangga luar x_1 dan x_2 dari x yang juga tetangga luar dari y . Berarti terdapat dua jalan dengan panjang ≤ 2 dari x ke x_1 dan x_2 . Sehingga $r(x) = x_1$ dan x_2 . Bertentangan dengan sifat ketunggalan perulangan.

Lema 6 Misalkan G adalah $(d,2)$ -digraf. Jika $(y,x) \hat{\in} G$ maka paling banyak satu titik tetangga luar dari x yang berada di $N^+(y)$.

Bukti. Andaikan dua tetangga luar x_1 dan x_2 dari x yang juga tetangga luar dari y . Berarti terdapat dua jalan dengan panjang ≤ 2 dari y ke x_1 dan x_2 . Sehingga $r(y) = x_1$ dan x_2 . Bertentangan dengan sifat ketunggalan perulangan.

Lema 7 Misalkan x, y, u , dan v titik-titik di $(d,2)$ -digraf G dengan $r(x) = y$. Jika $(u,v) \hat{\in} G$ maka u dan v tidak boleh bersama-sama menjadi tetangga luar titik x .

Bukti. Andaikan titik u dan v keduanya tetangga luar titik x dan $(u,v) \hat{\in} G$. Berarti terdapat dua jalan dengan panjang ≤ 2 dari x ke v , yaitu (x,v) dan (x,u,v) . Sehingga $v = r(x)$. Bertentangan dengan $r(x) = y$.

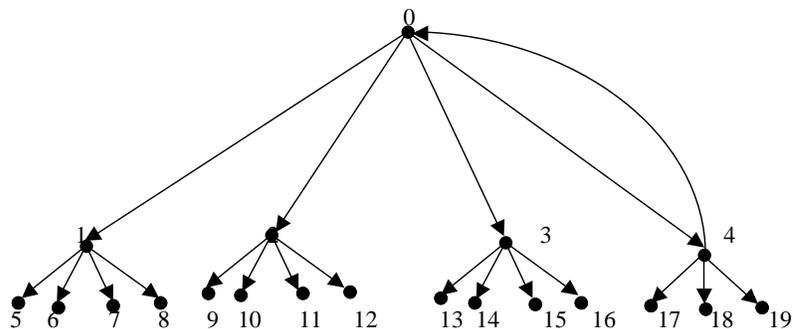
Pada bagian berikut ini akan dipandang $(4,2)$ -digraf G yang memuat suatu lingkaran dengan panjang 2. Karena G memuat C_2 maka mereka sekurang-kurangnya memuat dua titik perulangan-diri.

KASUS (4,2)-DIGRAF YANG MEMUAT SUATU LINGKARAN DENGAN PANJANG 2

Misalkan G suatu $(4,2)$ -digraf yang memuat suatu lingkaran dengan panjang 2. Titik-titik di G diberi label dengan $0, 1, 2, \dots, 19$. Karena G memuat suatu lingkaran dengan panjang 2 maka G memiliki sekurang-kurangnya satu titik perulangan-diri. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan sebagai berikut :

1. 0 adalah titik perulangan-diri;
2. $N^+(0) = \{1,2,3,4\}$ dan $(0,4) \hat{=} C_2$ (sehingga 4 juga titik perulangan-diri);
3. $N^+(1) = \{5,6,7,8\}$, $N^+(2) = \{9,10,11,12\}$, $N^+(3) = \{13,14,15,16\}$, dan $N^+(4) = \{17,18,19,0\}$ (lihat gambar 5);

Notasikan juga $L_1 = \{1,2,3,4\}$, $L_2 = N^+(1) \dot{\cup} N^+(2) \dot{\cup} N^+(3) \dot{\cup} N^+(4)$ dan $D_i = \{j \in N^+(i)\}$, untuk setiap $i \in V(G)$.



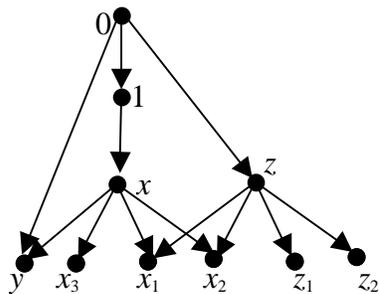
Gambar 5. $(4,2)$ -digraf yang memuat lingkaran dengan panjang 2

Misalkan titik 1 suatu titik bukan perulangan-diri. Maka tiap titik x yang berada di $N^+(1)$ haruslah bukan perulangan-diri. Karena jika terdapat titik perulangan-diri x yang berada di $N^+(1)$ maka terdapat dua jalan dengan panjang 2 dari 0 ke x . Teorema berikut akan menunjukkan sifat tetangga luar titik x yang berada di $N^+(1)$.

Teorema 2 berikut ini telah dibuktikan di Iswadi & Baskoro, (1999). Dalam penelitian ini akan dibuktikan lagi dengan menggunakan lema 4 sampai lema 7. Pembuktian yang dilakukan menjadi lebih pendek dibandingkan di Iswadi & Baskoro, (1999).

Teorema 2 Misalkan G (4,2)-digraf seperti gambar 4 dan x titik di $N^+(1)$. Misalkan $(x,y) \hat{=} G$, untuk suatu y di $N^+(0)$. Misalkan $r(1) = y$. Maka untuk setiap z di $N^+(0)$, terdapat paling banyak satu tetangga luar bukan perulangan-diri dari x yang berada di D_z .

Bukti. Andaikan dua titik dari $N^+(x)$ berada di D_z , untuk suatu z titik bukan perulangan-diri di $N^+(0)$. Misalkan $N^+(x) = \{y, x_1, x_2, x_3\}$ dengan x_1 dan x_2 berada di D_z . Karena $r(1) = y$ dan $(1,x) \hat{=} G$, berdasarkan teorema 1, $r(x)$ berada di $N^+(y)$. Dengan menggunakan lema 6 maka x_1 atau x_2 tidak boleh sama dengan z . Misalkan tiga titik yang lain dari D_z adalah z, z_1 , dan z_2 sedemikian sehingga $N^+(z) = \{x_1, x_2, z_1, z_2\}$ (lihat gambar 6).



Gambar 6.

Jelas $z \neq y$. Karena jika $z = y$ maka x dan z melanggar kesimpulan lema 5. Juga jelas $z \neq 1$. Karena jika $z = 1$ maka x melanggar kesimpulan lema 6. Untuk mencapai z dalam 2 langkah dari x kita tidak bisa melalui y , karena jika melalui y akan mengakibatkan terdapat dua jalan dengan panjang ≤ 2 yakni $(0, z)$ dan $(0, y, z)$ dari 0 ke z , akibatnya $r(0) = z$, berlawanan dengan 0 titik perulangan-diri. Untuk mencapai z dalam 2 langkah dari x tidak bisa melalui x_1 dan x_2 karena bertentangan dengan lema 4. Jadi haruslah $(x_3, z) \in G$. Selanjutnya, untuk mencapai z_1 dalam 2 langkah dari x tidak bisa melalui y karena dengan cara yang sama dengan di atas mengakibatkan $r(0) = z_1$. Bertentangan dengan 0 titik perulangan-diri. Jika (x_1, z_1) atau $(x_2, z_1) \in G$ maka x_1 atau x_2 melanggar kesimpulan lema 6. Sehingga haruslah $(x_3, z_1) \in G$. Dengan cara yang sama kita dapat tunjukkan bahwa untuk bisa mencapai z_2 dari x dalam dua langkah harus melalui x_3 . Jadi haruslah $(x_3, z_2) \in G$. Tapi dengan demikian z melanggar kesimpulan lema 6. Jadi terdapat paling banyak satu tetangga luar dari x yang berada di D_z .

KESIMPULAN

Beberapa hal yang dapat digarisbawahi pada penelitian ini adalah :

1. Konsep perulangan merupakan akibat langsung dari jumlah titik (d, k) -digraf G yang kurang satu dari jumlah Moore.
2. Jika dua titik x dan y bertetangga di (d, k) -digraf G maka titik tetangga luar sekutu mereka dibatasi paling banyak satu titik.
3. Diperlukan penelitian yang lebih intens dan mendalam untuk mengetahui

lebih banyak sifat-sifat perulangan pada (d,k) -digraf G , dengan $k \geq 2$.

DAFTAR PUSTAKA

- Baskoro, E.T., Miller, M., Siran, J., Sutton, M. June 1997. ***Almost Moore Digraphs of Degree Three do not exist***. Research Report, Department of Computer Science and Software Engineering of the University of Newcastle NSW Australia.
- Baskoro, E.T., Miller, M., Plesnik, J. 1998. ***On the Structure of Digraphs with Order Close to the Moore Bound***. Graphs and Combinatorics **14**, pp. 109-119.
- Baskoro, E.T., Miller, M., Plesnik, J., Znam, S. 1995. ***Digraphs of Degree 3 and Order Close to the Moore Bound*** Journal Graph Theory **20**, pp. 339-349.
- Bidges, W.G., Toueg, S. 1980. ***On the Impossibility of Directed Moore Graphs***. Journal Combinatorial Theory Series **B29**, pp. 339-341.
- Iswadi, H., Baskoro, E.T. 1999. ***On $(4,2)$ -digraphs with containing cycle length 2***. submitted.
- Miller, M., Fris, I. 1992. ***Maximum Order Digraphs for Diameter 2 and 3***. Pullman volume of Graphs and Matrices. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics **139**, pp. 269-278.
- Miller, M., Fris, I. 1988. ***Minimum Diameter of Diregular Digraphs of Degree 2***, Computer Journal **31**, pp. 71-75.
- Miller, M., Gimbert, J., Siran, J., Slamin. September 1998. ***Almost Moore Digraphs are Diregular***. Research Report, Department of Computer Science and Software Engineering of the University of Newcastle NSW Australia.

Hazrul Iswadi

Plesnik, J., Znam, S. 1974. ***Strongly Geodetic Directed Graphs***. acta
F. R. N. Univ. Comen. Mathematica **XXIX**, pp. 29-34.

Simanjuntak, R.M.G., Baskoro, E.T. 1999. ***The Uniqueness of Almost
Moore Digraphs with Degree 4 and Diameter 2***. submitted.