

Berfikir secara Matematika

Oleh: Hazrul Iswadi

Departemen MIPA Ubaya

Pelatihan olimpiade matematika di Indonesia, khususnya untuk sekolah dasar dan menengah, marak dilakukan sebagai akibat dari menjamurnya berbagai kompetisi matematika di segala tingkatan, baik yang diadakan pemerintah maupun yang diadakan lembaga-lembaga swasta. Materi kompetisi atau olimpiade matematika yang tidak mengikuti secara linier materi kurikulum regular matematika di sekolah memaksa berbagai pihak yang berkepentingan dengan keberhasilan siswanya untuk menang di kompetisi-kompetisi tersebut mempersiapkan secara khusus semisal dengan mengadakan pelatihan.

Pelatihan olimpiade matematika dilakukan dengan berbagai format sesuai dengan permintaan dari penyelenggara. Ada yang meminta diadakan dua hari, tapi ada pula yang dilakukan lima hari atau satu minggu. Permintaan tersebut dipengaruhi oleh beberapa hal-hal substantif seperti seberapa banyak materi yang akan diberikan di pelatihan tapi juga berkaitan dengan hal-hal administratif seperti keterbatasan biaya.

Walaupun pelatihan olimpiade matematika berbeda format penyelenggaraan, tapi yang sama persis adalah dalam hal tujuan yaitu meningkatkan kemampuan penyelesaian masalah matematika peserta pelatihan. Output pelatihan dalam hal peningkatan kemampuan penyelesaian masalah antara lain diukur dengan kenaikan peringkat atau menjuarai kompetisi.

Kompetisi Matematika Berjenjang

Kompetisi matematika yang diadakan oleh Kementerian Pendidikan Nasional adalah kompetisi yang berjenjang. Kompetisi dimulai dari intra sekolah untuk mengirim utusan sekolah yang akan berlaga di Olimpiade Sains Nasional tingkat Kabupaten/Kota (OSK). Pemilihan utusan dari sekolah dapat dilakukan dengan mengadakan kompetisi sendiri, ditunjuk guru atau diambilkan dari tim lomba yang sudah dibentuk jauh-jauh hari. Di OSK akan dipilih tiga terbaik yang akan mewakili Kabupaten/Kota untuk bersaing di Olimpiade Sains Nasional tingkat Propinsi (OSP). Kemudian di OSP akan dipilih pula tiga terbaik yang akan mewakili propinsi di tingkat nasional. Pada Olimpiade Sains tingkat Nasional (OSN), para peserta yang memenuhi grade tertentu akan dihargai medali emas, perak, dan perunggu.

Model kompetisi yang berjenjang tersebut menyerupai kompetisi-kompetisi matematika yang telah lama diadakan oleh negara-negara maju di dunia seperti model kompetisi di Rusia atau Amerika Serikat. Model soal matematika yang diberikan disesuaikan dengan jenjang yang

dijalani. Jenjang yang terendah dimulai dari sekolah dan di akhiri dengan jenjang tertinggi di tingkat nasional pada OSN. Soal-soal pada jenjang yang rendah didominasi oleh pilihan ganda dan penyelesaian menggunakan perhitungan-perhitungan singkat. Sedangkan soal-soal pada jenjang yang lebih tinggi didominasi oleh soal-soal essay dan pembuktian.

Kenapa soal-soal pada jenjang yang lebih tinggi didominasi oleh soal-soal essay dan pembuktian? Hal ini berkaitan dengan proses berfikir matematika yang terlibat dalam pembuktian dan soal-soal essay lebih menyeluruh dan mendalam dibandingkan dengan proses berfikir matematika dalam soal-soal pilihan ganda.

Proses Berfikir Matematika

Menurut Mason dkk (Mason dkk, 2010) proses berfikir matematika memiliki tiga fase yaitu: Fase masuk (*entry phase*), fase menyelesaikan (*attack phase*), dan fase review (*review phase*). Pada fase masuk antara lain dilakukan proses pengenalan masalah dan mendefinisikan masalah. Pada fase ini dilakukan upaya mengelompokkan dan mengenali masalah termasuk dalam bidang aljabar, geometri, teori bilangan, kombinatorika, atau campuran. Kemudian pada fase ini juga diperkenalkan symbol dan notasi-notasi.

Pada fase menyelesaikan dilakukan semua aktifitas matematika yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah. Pengetahuan tentang teknik, prinsip, atau konsep matematika tentu menjadi syarat utama dalam menjalani fase ini. Beberapa hal seperti kemampuan intelektual, kreatifitas, ingatan, dan ketrampilan juga menjadi factor yang mempengaruhi keberhasilan dalam fase menyelesaikan ini (Davidson dan Sternberg, editor, 2003).

Sedangkan fase ketiga yaitu fase review berguna dalam refleksi atas fase-fase sebelumnya. Fase ini akan membantu untuk memeriksa apakah proses berfikir matematika sudah benar dan apakah masalah yang telah diselesaikan dapat diletakkan dalam konteks yang lebih luas dan lebih umum.

Dari uraian dua paragraf sebelumnya terlihat bahwa walaupun usaha yang paling keras dalam proses berfikir matematika dilakukan pada fase menyelesaikan, tapi ternyata kemampuan berfikir matematika akan berkembang dengan baik jika proses berfikir matematika dilakukan dengan melalui tiga fase secara berkesinambungan.

Pembuktian dalam matematika adalah rangkaian argumen yang disusun berdasarkan konsistensi kebenaran dalam upaya untuk meyakinkan pembaca bahwa pernyataan tertentu adalah benar. Semua persoalan matematika membutuhkan pembuktian untuk dapat dinyatakan benar atau dapat diselesaikan. Pada soal-soal pilihan ganda kesimpulan yang ingin dibuktikan, biasanya tidak dieksplisitkan, dihitung, ditentukan, diselesaikan, atau dicari sedangkan pada soal-

soal essay kesimpulan yang ingin dibuktikan, biasanya dituliskan eksplisit, ditelusuri kembali dengan menggunakan rangkaian argumen yang benar.

Ketiga fase dalam berfikir matematika di atas dilakukan dengan lebih intens dalam menjawab soal-soal pembuktian. Kecermatan dalam memilih symbol dan notasi sewaktu menuliskan pembuktian membutuhkan intensitas dalam melakukan fase masuk. Kemudian rangkaian argument yang dipilih ditentukan oleh penguasaan pada fase menyelesaikan. Sedangkan proses penulisan argument pembuktian agar dapat dibaca dan dipahami oleh pembaca membutuhkan fase refleksi.

Sedangkan soal-soal pilihan ganda tidak membutuhkan ketiga fase di atas secara intens. Pada soal-soal pilihan ganda tidak akan bisa dibedakan antara jawaban yang diperoleh setelah melakukan proses berfikir matematika yang benar dengan jawaban intuitif atau menerka.

Mana yang Lebih Baik: Perhitungan atau Pembuktian?

Tapi pertanyaan besar penulis rasakan manakala banyak siswa-siswa pintar yang penulis latih dalam pelatihan olimpiade matematika tidak menyukai pembuktian. Pembuktian dianggap pekerjaan sia-sia karena mengulang hal-hal yang sudah dianggap benar. Pembuktian tidak menarik dibandingkan mendapatkan hal-hal baru yang terlihat pada soal-soal yang membutuhkan proses menentukan, atau mencari.

Berikut ini adalah beberapa soal-soal pembuktian yang menarik, tapi penulis rasakan tidak disukai oleh para siswa ketika disajikan dalam pelatihan olimpiade. Beberapa symbol ditulis dalam bentuk true text dari LaTeX.

1. Misalkan ABC adalah suatu segitiga dengan P adalah titik sebarang dalam segitiga tersebut. Misalkan d_1 , d_2 , dan d_3 menyatakan berturut-turut jarak tegak lurus dari titik P ke sisi BC, CA, dan AB. Misalkan h_1 , h_2 , dan h_3 menyatakan berturut-turut panjang garis tinggi dari titik-titik A, B, dan C ke sisi-sisi dihadapannya. Tentukan nilai

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3}$$

2. Segitiga ABC adalah segitiga sama kaki dengan $AB = AC = 2$. Terdapat 100 titik P_1, P_2, \dots, P_{100} pada sisi BC. Jika $m_i = (\overline{AP_i})^2 + \overline{BP_i} \times \overline{P_iC}$ ($i = 1, 2, \dots, 100$) maka tentukan nilai $m_1 + m_2 + \dots + m_{100}$.

Kedua soal di atas adalah soal-soal yang memerlukan rangkaian argumen yang benar untuk mendapatkan penyelesaiannya. Berarti kedua soal di atas membutuhkan pembuktian untuk

menjawabnya. Pada soal nomor 1, setelah dibuktikan, dapat diperoleh kesimpulan bahwa tidak masalah dimanapun titik P ditempatkan dalam segitiga maka nilai

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3}$$

selalu bernilai 1. Kemudian angka-angka 2 dan 100 yang tertera pada soal nomor 2 hanyalah sarana untuk menyatakan soal. Sebenarnya tidak menjadi masalah jika angka 2 dan 100 diganti dengan angka berapapun. Kok bisa? Jawabannya dapat dilihat pada pembuktian yang dilakukan untuk menyelesaikan kedua soal tersebut (Barbeau dkk., 1995 dan Jiagu, 2010).

Hal yang mencengangkan dan menimbulkan pertanyaan pada sebuah masalah matematika itulah yang menggambarkan esensi dari matematika. Sifat umum dan general yang diperoleh dari sebuah pernyataan yang diformulasikan kemudian dibuktikan dalam pembuktian menghasilkan pengetahuan baru yang solid. Soal-soal pembuktian mengakomodir proses matematika yang menghasilkan pengetahuan baru yang solid tersebut.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa soal-soal pilihan ganda yang lebih didominasi oleh proses menghitung kurang intens dalam menggunakan ketiga fase proses berfikir matematika. Justru soal-soal pembuktianlah yang dapat secara intens menggunakan ketiga fase tersebut.

Daftar Pustaka

1. Barbeau, E.J., Klamkin, M.S., dan Moser, W.O.J., *Five Hundred Mathematical Challenges*, The MAA, Washington, 1995.
2. Davidson, J.E., dan Sternberg R.J., editors, *The Psychology of Problem Solving*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
3. Jiagu, X., *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses – For Junior Section, Volume 1*, World Scientific, 2010.
4. Mason, J., Burton, L., dan Stacey, K., *Thinking Mathematically*, 2nd Edition, Prentice Hall, Harlow, 2010.